International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

# Mathématiques

# Niveau Supérieur

## Spécimens des épreuves 1, 2 et 3

**(adapté de la session de novembre 2014)**

**Premiers examens en 2017**

# TABLE DES MATIÈRES

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Mathématiques
# Niveau supérieur
# Épreuve 1

SPÉCIMEN (adapté de la session de novembre 2014)

Numéro de session du candidat

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

2 heures

## Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

12 pages

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

## Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

**1.** [Note maximale : 4]

La fonction $f$ est définie par $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

La représentation graphique de la fonction $y = g(x)$ est obtenue en appliquant les transformations suivantes à la représentation graphique de $y = f(x)$ :

une translation par le vecteur $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;

une translation par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Trouvez une expression pour $g(x)$. [2]

(b) Indiquez les équations des asymptotes de la représentation graphique de $g$. [2]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2.** [Note maximale : 6]

L'équation du second degré $2x^2 - 8x + 1 = 0$ possède les racines $\alpha$ et $\beta$.

(a) Sans résoudre l'équation, trouvez la valeur de

(i) $\alpha + \beta$ ;

(ii) $\alpha\beta$. [2]

Une autre équation du second degré $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ possède les racines $\dfrac{2}{\alpha}$ et $\dfrac{2}{\beta}$.

(b) Trouvez la valeur de $p$ et la valeur de $q$. [4]

**3.** [Note maximale : 6]

Un point $\mathrm{P}$, par rapport à une origine $\mathrm{O}$, admet comme vecteur-position $\vec{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 3+2s \\ 1-s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que $\left|\vec{\mathrm{OP}}\right|^2 = 6s^2 + 12s + 11$. [1]

(b) À partir de là, trouvez la longueur minimale de $\vec{\mathrm{OP}}$. [4]

(c) Expliquez, géométriquement, pourquoi votre réponse correspond à une valeur minimale. [1]

**4.** [Note maximale : 7]

Les événements $A$ et $B$ sont tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$ et $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$.

(a) Déterminez la valeur de $\mathrm{P}(A \cup B)$ lorsque

(i) $A$ et $B$ sont incompatibles ;

(ii) $A$ et $B$ sont indépendants. [4]

(b) Trouvez la plus petite valeur possible et la plus grande valeur possible de $\mathrm{P}(A \mid B)$. [3]

**5.** [Note maximale : 6]

En utilisant le changement de variable $u = 1 + \sqrt{x}$ , trouvez $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ .

**6.** [Note maximale : 7]

Utilisez la récurrence pour prouver que $(2n)! \geq 2^n(n!)^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

**7.** [Note maximale : 7]

Une variable aléatoire continue $T$ admet comme fonction de densité la fonction $f$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} |2-t|, 1 \le t \le 3 \\ 0, \text{autrement} \end{cases}.$$

(a) Esquissez la représentation graphique de $y = f(t)$. [2]

(b) (i) Trouvez le premier quartile de $T$.

(ii) À partir de là, trouvez l'intervalle interquartile de $T$. [5]

**8.** [Note maximale : 7]

Un ensemble d'entiers positifs $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$ est utilisé pour concevoir un paquet de neuf cartes. Chaque carte affiche un entier positif de cet ensemble, sans répétition. Grace souhaite choisir au hasard quatre cartes de ce paquet de neuf cartes.

(a) Trouvez le nombre de choix possibles que Grace pourrait effectuer si le plus grand entier tiré parmi les quatre cartes est un $5$, un $6$ ou un $7$. [3]

(b) Trouvez le nombre de choix possibles que Grace pourrait effectuer si au moins deux des quatre entiers tirés sont pairs. [4]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

## Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

**9.** [Note maximale : 17]

La fonction $f$ est définie par $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez $f^{-1}(x)$. [3]

La fonction $g$ est définie par $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
La représentation graphique de $y = g(x)$ coupe l’axe des abscisses $\mathrm{O}x$ au point $\mathrm{Q}$.

(b) Montrez que l’équation de la tangente $T$ à la représentation graphique de $y = g(x)$ au point $\mathrm{Q}$ est $y = x - 1$. [3]

Une région $R$ est délimitée par les représentations graphiques de $y = g(x)$, de la tangente $T$ et de la droite $x = \mathrm{e}$.

(c) Trouvez l’aire de la région $R$. [5]

(d) (i) Montrez que $g(x) \le x - 1$, $x \in \mathbb{R}^+$.

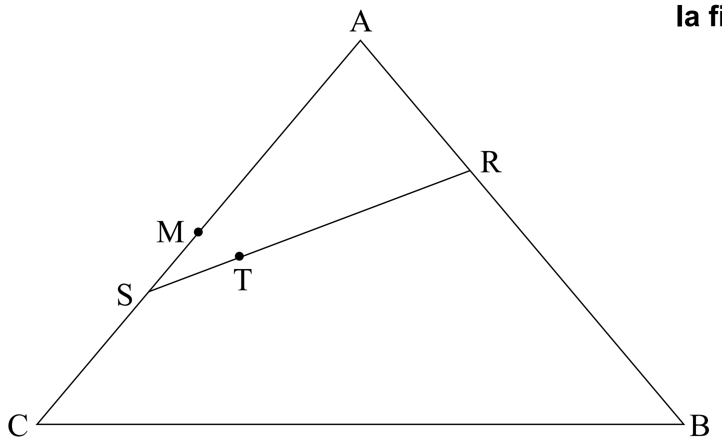
(ii) En remplaçant $x$ par $\frac{1}{x}$ dans la partie (d)(i), montrez que $\frac{x-1}{x} \le g(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. [6]

N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

**10.** [Note maximale : 14]

Les vecteurs-position des points A, B et C sont respectivement $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ par rapport à une origine O. Le diagramme suivant montre le triangle ABC et les points M, R, S et T.

**la figure n'est pas à l'échelle**




M est le milieu de [AC].

R est un point sur [AB] tel que $\vec{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}\vec{\mathrm{AB}}$.

S est un point sur [AC] tel que $\vec{\mathrm{AS}} = \frac{2}{3}\vec{\mathrm{AC}}$.

T est un point sur [RS] tel que $\vec{\mathrm{RT}} = \frac{2}{3}\vec{\mathrm{RS}}$.

(a) (i) Exprimez $\vec{\mathrm{AM}}$ en fonction de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$.

(ii) À partir de là, montrez que $\vec{\mathrm{BM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$. [4]

(b) (i) Exprimez $\vec{\mathrm{RA}}$ en fonction de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

(ii) Montrez que $\vec{\mathrm{RT}} = -\frac{2}{9}\boldsymbol{a} - \frac{2}{9}\boldsymbol{b} + \frac{4}{9}\boldsymbol{c}$. [5]

(c) Prouvez que T est situé sur [BM]. [5]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

**11.** [Note maximale : 19]

(a) Montrez que $(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^n + (1 - \mathrm{i}\tan\theta)^n = \dfrac{2\cos n\theta}{\cos^n\theta}$, $\cos\theta \neq 0$. [6]

(b) (i) Utilisez l’identité de l’angle double $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ pour montrer que $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

(ii) Montrez que $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

(iii) À partir de là, trouvez la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{2\cos 4x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. [13]

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Barème de notation

## Spécimen
## (adapté de la session de novembre 2014)

## Mathématiques

## Niveau supérieur

## Épreuve 1

16 pages

## Instructions pour les examinateurs

### Abréviations

***M*** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes du raisonnement doivent être visibles.

***(M)*** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.

***A*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points ***M*** qui précèdent.

***(A)*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.

***R*** Points attribués pour un **raisonnement** clair.

***N*** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes ne sont **pas** visibles.

***AG*** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

### Utilisation du barème

### 1 Généralités

Corrigez selon les instructions de RM™ Assessor et selon le document intitulé « **Mathématiques NS – Directives concernant la notation électronique, mai 2016** ». Il est essentiel de lire ce dernier avant de commencer vos corrections. En particulier, veuillez noter les points suivants.

- Les points doivent être enregistrés à l'aide des annotations spécifiées. Veuillez vérifier de bien saisir les points pour la bonne question.
- Si une partie est **complètement correcte** (et obtient donc tous les points pour le raisonnement devant être visible), utilisez les coches avec des nombres pour attribuer la totalité des points.
- Si une partie est complètement fausse, mettez ***A0*** à côté de la réponse finale.
- Si vous attribuez toute autre chose à une partie, vous **devez** l'enregistrer à l'aide de **toutes** les annotations.
- Tous les points doivent être additionnés et enregistrés par RM™ Assessor.

### 2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- N'attribuez **pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer ***M0*** suivi de ***A1***, puisque le ou les points ***A*** dépendent du ou des points ***M*** précédents, s'il y en a.
- Lorsque des points ***M*** et des points ***A*** sont marqués sur la même ligne, par exemple ***M1A1***, cela signifie habituellement ***M1*** pour avoir **tenté** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple substitution dans une formule) et ***A1*** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise ***(M2)***, ***N3***, etc., ne fractionnez **pas** ces points.

- Lorsque vous voyez une réponse correcte à une question ou à une partie de question, ignorez le travail correct qui suit. Cependant, si le travail qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier point ***A1***. Une exception peut être faite dans le cas de réponses numériques, lorsqu'une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Toutefois, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une autre partie, et si un raisonnement correct ***FT*** est présent, attribuez les points ***FT*** le cas échéant mais n'attribuez pas le dernier point ***A1*** dans cette partie.

  Exemples

| | **Réponse correcte présente** | **Raisonnement qui suit présent** | **Action** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $8\sqrt{2}$ | 5,65685… (valeur décimale incorrecte) | Attribuez le dernier point ***A1*** *(ignorez le travail qui suit)* |
| **2.** | $\frac{1}{4}\sin 4x$ | $\sin x$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |
| **3.** | $\log a - \log b$ | $\log(a-b)$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |

## 3 Points *N*

*Attribuez des points **N** pour des réponses **correctes** si le raisonnement n'est **pas** visible.*

- N'attribuez **pas** un mélange de points ***N*** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points ***N*** possibles que le total des points ***M***, ***A*** et ***R*** ; ceci est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas les instructions, à savoir de montrer les étapes de leur travail.

## 4 Points implicites

*Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, **par exemple (M1)**, et ils ne peuvent être attribués que s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.*

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

## 5 Points de suivi

*Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans la ou les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT, il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, obtenue à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points ***FT***, à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points ***A*** **dépendants** ne peut être attribué, mais des points ***M*** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

## 6 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière. Utilisez **MR** pour indiquer qu'il s'agit d'une erreur de lecture. Puis déduisez le premier des points à attribuer, même si c'est un point **M**, mais attribuez tous les autres points de sorte que le candidat ne perd qu'un seul point.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture, accordez alors moins de points, à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.

## 7 Points discrétionnaires *(d)*

*Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Dans de tels cas, il convient d'utiliser l'annotation **(d)** et de rédiger un bref commentaire à côté du point afin d'expliquer sa décision.*

## 8 Autres méthodes

*Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.*

- Des autres méthodes possibles pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, *etc.*
- Des autres solutions possibles pour une partie de question sont indiquées par **SOIT … SOIT**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi une mise en page particulière (avec des alignements) pour aider les examinateurs à reconnaître où ces autres solutions commencent et finissent.

## 9 Autres formes

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes possibles de **notation**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses, immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

**Exemple** : pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x-3)$, le barème de notation propose:

$f'(x) = \left(2\cos(5x-3)\right)5 \quad \left(=10\cos(5x-3)\right)$ ***A1***

Attribuez ***A1*** pour $\left(2\cos(5x-3)\right)5$, même si $10\cos(5x-3)$ n'est pas visible.

**10 Précision des réponses**

*Les candidats **NE** doivent **PLUS** être pénalisés pour une erreur de précision (**AP**).*

*Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera prévu pour avoir donné la réponse à la précision demandée. Lorsque le niveau de précision n'est pas spécifié dans la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près. Veuillez soigneusement vérifier le travail des candidats pour les points **FT**.*

**11 Travail barré**

*Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou s'il a barré son travail d'une autre façon, n'attribuez aucun point pour ce travail.*

**12 Calculatrice**

*Aucune calculatrice n'est autorisée. L'utilisation de n'importe quelle calculatrice pour l'épreuve 1 est une fraude, et entraînera l'absence de note pour l'épreuve. Si vous voyez un travail qui suggère qu'un candidat a utilisé une calculatrice, veuillez, s'il vous plaît, suivre la procédure concernant les fraudes. Exemple : Avoir trouvé un angle, étant donné un rapport trigonométrique de 0,4235.*

**13 Plusieurs solutions**

*Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examinateur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.*

**14 Travail du candidat**

Les candidats sont supposés rédiger les réponses à la section A sur les épreuves d'examen (dans les cases prévues à cet effet) et les réponses à la section B dans le livret de réponses. Il arrive parfois que les candidats aient besoin de plus de place pour rédiger leurs réponses à la section A et ils utilisent alors le livret (et souvent ils le mentionnent sur leurs épreuves d'examen) ou poursuivent leur raisonnement en dehors des cases prévues pour leurs réponses. Il convient de corriger ce travail.

Les instructions stipulent que les candidats ne doivent pas écrire sur la section B des épreuves d'examen. Par conséquent, les candidats ont pu utiliser cet espace comme brouillon, en supposant que ce travail sera ignoré. Si les candidats ont écrit leurs réponses dans les livrets de réponses, il n'y a pas lieu de regarder les épreuves d'examen. Cependant, s'il manque des questions entières ou des parties de question dans les livrets de réponses, veuillez vérifier qu'elles ne se trouvent pas sur les épreuves d'examen. Si elles se trouvent sur les épreuves d'examen, veuillez corriger les questions ou les parties de solutions qui ne sont pas dans les livrets de réponses.

## Section A

**1.** (a) $g(x) = \dfrac{1}{x+3} + 1$ ***A1A1***

**Note :** Attribuez ***A1*** pour $x+3$ au dénominateur et ***A1*** pour le « $+1$ ».

***[2 points]***

(b) $x = -3$ ***A1***
$y = 1$ ***A1***

***[2 points]***

***Total [4 points]***

**2.** (a) utilisation des formules pour la somme et le produit de racines :

(i) $\alpha + \beta = 4$ ***A1***

(ii) $\alpha\beta = \dfrac{1}{2}$ ***A1***

**Note :** Attribuez ***A0A0*** si les résultats ci-dessus ont été obtenus en résolvant l'équation initiale (sauf si cela a été fait à des fins de vérification).

***[2 points]***

(b) **MÉTHODE 1**

la forme requise de l'équation du second degré est $x^2 - \left(\dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta}\right)x + \left(\dfrac{2}{\alpha}\right)\left(\dfrac{2}{\beta}\right)$ ***(M1)***

$q = \dfrac{4}{\alpha\beta}$

$q = 8$ ***A1***

$p = -\left(\dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta}\right)$

$= -\dfrac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}$ ***M1***

$= -\dfrac{2 \times 4}{\frac{1}{2}}$

$p = -16$ ***A1***

**Note:** Acceptez l'utilisation de racines exactes.

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 2*

**MÉTHODE 2**

en remplaçant $x$ par $\frac{2}{x}$ ***M1***

$2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{x}\right) + 1 = 0$

$\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x} + 1 = 0$ ***(A1)***

$x^2 - 16x + 8 = 0$

$p = -16$ et $q = 8$ ***A1A1***

| |
|---|
| **Note :** Attribuez ***A1A0*** pour $x^2 - 16x + 8 = 0$, c'est-à-dire, si $p = -16$ et $q = 8$ ne sont pas indiqués de façon explicite. |

***[4 points]***

***Total [6 points]***

**3.** (a) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = (1+s)^2 + (3+2s)^2 + (1-s)^2$ ***A1***

$= 6s^2 + 12s + 11$ ***AG***

***[1 point]***

(b) pour avoir tenté de dériver : $\frac{d}{ds}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \ (= 12s + 12)$ ***M1***

pour avoir tenté de résoudre : $\frac{d}{ds}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = 0$ pour $s$ ***(M1)***

$s = -1$ ***A1***

la longueur minimale de $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ est $\sqrt{5}$ ***A1***

***[4 points]***

(c) (Le point P ne peut être situé que sur une droite)
une droite ne possède qu'un seul point qui est le plus près de l'origine, mais n'en possède aucun qui est le plus loin de l'origine ***R1***

***[1 point]***

***Total [6 points]***

**4.** (a) (i) utilisation de $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ ***(M1)***

$\mathrm{P}(A \cup B) = 0,2 + 0,5$

$= 0,7$ ***A1***

(ii) utilisation de $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ***(M1)***

$\mathrm{P}(A \cup B) = 0,2 + 0,5 - 0,1$

$= 0,6$ ***A1***

***[4 points]***

(b) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$\mathrm{P}(A \mid B)$ est minimale lorsque $A \cap B = \phi$ $\left(\mathrm{P}(A \cap B) = 0\right)$ ***R1***

$\mathrm{P}(A \mid B)$ est maximale lorsque $A \subseteq B$ $\left(\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\right)$ ***R1***

valeur minimale $= 0$, valeur maximale $= 0,4$ ***A1***

***[3 points]***

***Total [7 points]***

**5.** $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ***A1***

$\mathrm{d}x = 2(u-1)\,\mathrm{d}u$

**Note :** Attribuez le ***A1*** pour toute relation correcte entre d$x$ et d$u$.

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{(u-1)^2}{u}\,\mathrm{d}u$ ***(M1)A1***

**Note :** Attribuez le ***M1*** pour une tentative de changement de variable qui résulte en une intégrale ne faisant intervenir que $u$.

$= 2\displaystyle\int u - 2 + \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ ***(A1)***

$= u^2 - 4u + 2\ln u\,(+C)$ ***A1***

$= x - 2\sqrt{x} - 3 + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)(+C)$ ***A1***

**Note :** Attribuez le ***A1*** pour une expression correcte en $x$, mais pas nécessairement développée ou simplifiée de manière complète.

***[6 points]***

**6.** soit $\mathrm{P}(n)$ la proposition affirmant que $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$ , $n \in \mathbb{Z}^+$
considérons $\mathrm{P}(1)$ :

$2! = 2$ et $2^1 (1!)^2 = 2$ donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie ***R1***

supposons que $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $(2k)! \geq 2^k (k!)^2$ , $k \in \mathbb{Z}^+$ ***M1***

| **Note :** N'attribuez pas le ***M1*** pour des énoncés tels que « soit $n = k$ ». |
|---|

considérons $\mathrm{P}(k+1)$ :

$\big(2(k+1)\big)! = (2k+2)(2k+1)(2k)!$ ***M1***

$\big(2(k+1)\big)! \geq (2k+2)(2k+1)(k!)^2 2^k$ ***A1***

| **Note :** Tolérez une « démarche à l'envers » jusqu'à ce point, mais pas plus loin, à moins que celle-ci soit complètement justifiée. |
|---|

$= 2(k+1)(2k+1)(k!)^2 2^k$

$> 2^{k+1}(k+1)(k+1)(k!)^2$ puisque $2k + 1 > k + 1$ ***R1***

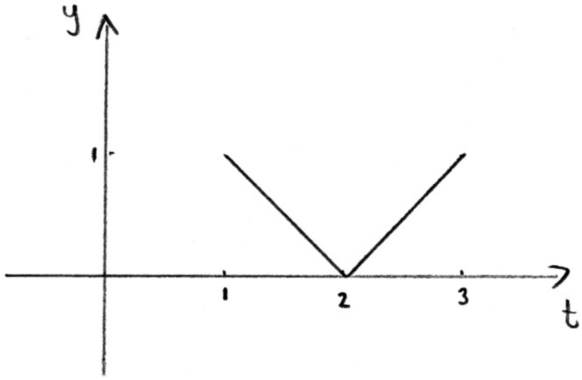
$= 2^{k+1}\big((k+1)!\big)^2$ ***A1***

$\mathrm{P}(k+1)$ est vraie lorsque $\mathrm{P}(k)$ est vraie et $\mathrm{P}(1)$ est vraie, donc $\mathrm{P}(n)$ est vraie, pour $n \in \mathbb{Z}^+$ ***R1***

| **Note :** Pour obtenir le dernier ***R1***, quatre points parmi les points précédents doivent avoir été attribués. |
|---|

***[7 points]***

**7.** (a)




$|2-t|$ correct pour $[1, 2]$ ***A1***

$|2-t|$ correct pour $[2, 3]$ ***A1***

***[2 points]***

(b) (i) soit $q_1$ le premier quartile

pour avoir considéré $\int_1^{q_1} (2 - t)\,dt = \frac{1}{4}$ ***M1A1***

pour avoir obtenu $q_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ***A1***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 7*

(ii) par symétrie, par exemple, $q_3 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ***A1***

donc $\text{IQR} = \sqrt{2}$ ***A1***

**Note :** N'acceptez que cette réponse finale pour le ***A1***.

***[5 points]***

***Total [7 points]***

**8.** (a) utilisation du principe d'addition avec $3$ termes ***(M1)***

pour obtenir ${}^4C_3 + {}^5C_3 + {}^6C_3 \ (= 4 + 10 + 20)$ ***A1***

le nombre de choix possibles est $34$ ***A1***

***[3 points]***

(b) **SOIT**

reconnaître les trois cas : ($2$ impairs et $2$ pairs ou $1$ impair et $3$ pairs ou $0$ impair et $4$ pairs) ***(M1)***

$\left({}^5C_2 \times {}^4C_2\right) + \left({}^5C_1 \times {}^4C_3\right) + \left({}^5C_0 \times {}^4C_4\right) \ (= 60 + 20 + 1)$ ***(M1)A1***

**SOIT**

reconnaître qu'il faut soustraire du total la somme de 4 impairs, et de 3 impairs et 1 pair ***(M1)***

${}^9C_4 - {}^5C_4 - \left({}^5C_3 \times {}^4C_1\right) \ (= 126 - 5 - 40)$ ***(M1)A1***

**PUIS**

le nombre de choix possibles est $81$ ***A1***

***[4 points]***

***Total [7 points]***

## Section B

**9.** (a) $x = \mathrm{e}^{3y+1}$ ***M1***

| |
|---|
| **Notes :** Le ***M1*** est pour avoir échangé les variables et peut être attribué à n'importe quelle étape de la démarche. L'attribution des autres points ne dépend pas du fait que ce point ait été attribué ou non. |

en prenant le logarithme népérien de chaque membre de l'équation et en tentant de transposer ***M1***

$\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{3}(\ln x - 1)$ ***A1***

***[3 points]***

(b) les coordonnées de Q sont $(1; 0)$, pouvant être vues n'importe où ***A1***

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ ***M1***

au point Q, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ ***A1***

$y = x - 1$ ***AG***

***[3 points]***

(c) soit $A$ l'aire demandée

$A = \int_1^e x - 1\mathrm{d}x - \int_1^e \ln x\mathrm{d}x$ ***M1***

| |
|---|
| **Notes :** Le ***M1*** est pour une différence d'intégrales. Tolérez ici l'absence de limites. |

pour avoir tenté d'utiliser l'intégration par parties pour trouver $\int \ln x\mathrm{d}x$ ***(M1)***

$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^{\mathrm{e}} - [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}}$ ***A1A1***

| |
|---|
| **Note :** Attribuez ***A1*** pour $\frac{x^2}{2} - x$ et ***A1*** pour $x\ln x - x$ . |

| |
|---|
| **Note :** Le deuxième ***M1*** et le deuxième ***A1*** sont indépendants du premier ***M1*** et du premier ***A1***. |

$= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} - \frac{1}{2}\left(= \frac{\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - 1}{2}\right)$ ***A1***

***[5 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 9*

(d) (i) **MÉTHODE 1**

pour avoir considéré, par exemple, $h(x) = x - 1 - \ln x$

$h(1) = 0$ et $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ ***(A1)***

puisque $h'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$, alors $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$ ***R1***

puisque $h'(x) \leq 0$ pour $0 < x \leq 1$, alors $h(x) \geq 0$ pour $0 < x \leq 1$ ***R1***

donc $g(x) \leq x - 1,\ x \in \mathbb{R}^+$ ***AG***

**MÉTHODE 2**

$g''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ ***A1***

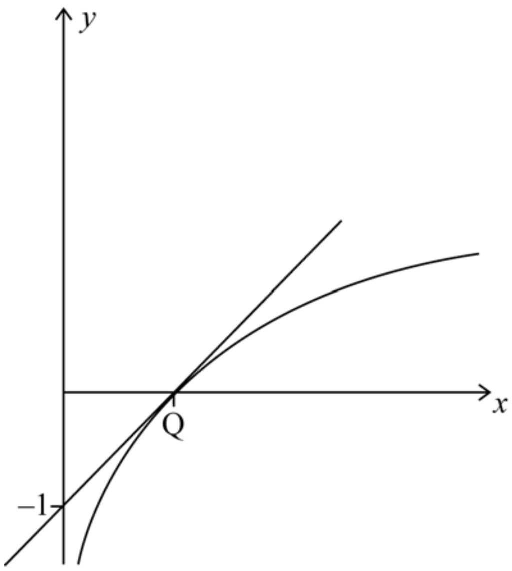
$g''(x) < 0$ (concave vers le bas) pour $x \in \mathbb{R}^+$ ***R1***

la représentation graphique de $y = g(x)$ est en dessous
de sa tangente ( $y = x - 1$ lorsque $x = 1$ ) ***R1***

donc $g(x) \leq x - 1,\ x \in \mathbb{R}^+$ ***AG***

**Note :** Le raisonnement peut être appuyé par des arguments graphiques dessinés.

**MÉTHODE 3**




représentations graphiques claires et correctes de $y = x - 1$
et de $\ln x$ pour $x > 0$ ***A1A1***

énoncé que la représentation graphique de $\ln x$ se trouve
en dessous de la représentation graphique de sa tangente
lorsque $x = 1$ ***R1AG***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 9*

(ii) en remplaçant $x$ par $\frac{1}{x}$ pour obtenir $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x} - 1\left(= \frac{1-x}{x}\right)$ ***M1***

$-\ln x \le \frac{1}{x} - 1\left(= \frac{1-x}{x}\right)$ ***(A1)***

$\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}\left(= \frac{x-1}{x}\right)$ ***A1***

donc $\frac{x-1}{x} \le g(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ ***AG***

***[6 points]***

***Total [17 points]***

**10.** (a) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ***(M1)***

$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ ***A1***

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ***M1***

$= \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ ***A1***

$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ ***AG***

***[4 points]***

(b) (i) $\overrightarrow{\mathrm{RA}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$= \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ ***A1***

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{RT}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{RA}} + \overrightarrow{\mathrm{AS}}\right)$ ***(M1)***

$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \frac{2}{3}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})\right)$ ou l'équivalent ***A1A1***

$= \frac{2}{9}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \frac{4}{9}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ ***A1***

$\overrightarrow{\mathrm{RT}} = -\frac{2}{9}\boldsymbol{a} - \frac{2}{9}\boldsymbol{b} + \frac{4}{9}\boldsymbol{c}$ ***AG***

***[5 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 10*

(c) $\overrightarrow{\mathrm{BT}} = \overrightarrow{\mathrm{BR}} + \overrightarrow{\mathrm{RT}}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{RT}}$ ***(M1)***

$= \frac{2}{3}\boldsymbol{a} - \frac{2}{3}\boldsymbol{b} - \frac{2}{9}\boldsymbol{a} - \frac{2}{9}\boldsymbol{b} + \frac{4}{9}\boldsymbol{c}$ ***A1***

$\overrightarrow{\mathrm{BT}} = \frac{8}{9}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)$ ***A1***

le point B est commun à $\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BT}} = \frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ ***R1R1***

donc T est situé sur [BM] ***AG***

***[5 points]***

***Total [14 points]***

**11.** (a) **MÉTHODE 1**

$(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^n + (1 - \mathrm{i}\tan\theta)^n = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n + \left(1 - \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n$ ***M1***

$= \left(\frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n + \left(\frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n$ ***A1***

par le théorème de De Moivre ***(M1)***

$\left(\frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n = \frac{\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta}{\cos^n\theta}$ ***A1***

reconnaître que $\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$ est le conjugué de $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ ***(R1)***

utilisation du fait que l'opération de conjugaison dans les complexes commute avec l'opération d'élévation à une puissance entière :

$\left(\frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n = \frac{\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta}{\cos^n\theta}$ ***A1***

$(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^n + (1 - \mathrm{i}\tan\theta)^n = \frac{2\cos n\theta}{\cos^n\theta}$ ***AG***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 11*

**MÉTHODE 2**

$(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^n + (1 - \mathrm{i}\tan\theta)^n = (1 + \mathrm{i}\tan\theta)^n + (1 + \mathrm{i}\tan(-\theta))^n$ ***(M1)***

$= \dfrac{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n}{\cos^n\theta} + \dfrac{\left(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)\right)^n}{\cos^n\theta}$ ***M1A1***

> **Note :** Attribuez ***M1*** pour la conversion des termes en cosinus et sinus.

utilisation du théorème de De Moivre ***(M1)***

$= \dfrac{1}{\cos^n\theta}\left(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta + \cos(-n\theta) + \mathrm{i}\sin(-n\theta)\right)$ ***A1***

$= \dfrac{2\cos n\theta}{\cos^n\theta}$ en tant que $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ et $\sin(-n\theta) = -\sin n\theta$ ***R1AG***

***[6 points]***

(b) (i) $\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ ***(M1)***

$\tan^2\dfrac{\pi}{8} + 2\tan\dfrac{\pi}{8} - 1 = 0$ ***A1***

soit $t = \tan\dfrac{\pi}{8}$

pour avoir tenté de résoudre $t^2 + 2t - 1 = 0$ pour $t$ ***M1***

$t = -1 \pm \sqrt{2}$ ***A1***

$\dfrac{\pi}{8}$ est un angle du premier quadrant et la tangente est positive

à l'intérieur de ce quadrant,

donc $\tan\dfrac{\pi}{8} > 0$ ***R1***

$\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ***AG***

(ii) $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ ***A1***

$= 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1$ ***M1***

$= 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) - 1$ ***A1***

$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ ***AG***

> **Note :** Acceptez toute méthode équivalente de dérivation de nombres complexes.

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 11*

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2\cos 4x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 8\cos^2 x - 8 + \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ ***M1***

**Note :** Le ***M1*** est pour une intégrante qui ne fait intervenir aucune fraction.

utilisation de $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ ***M1***

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\cos 2x - 4 + \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ ***A1***

$= \left[4\sin 2x - 8x + 2\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$ ***A1***

$= 4\sqrt{2} - \pi - 2$ (ou l'équivalent) ***A1***

***[13 points]***

***Total [19 points]***

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Mathématiques
# Niveau supérieur
# Épreuve 2

SPÉCIMEN (adapté de la session de novembre 2014)

Numéro de session du candidat

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

2 heures

---

**Instructions destinées aux candidats**

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

## Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

**1.** [Note maximale : 6]

Considérez les deux plans

$$\pi_1 : 4x + 2y - z = 8$$
$$\pi_2 : x + 3y + 3z = 3.$$

Trouvez l'angle entre $\pi_1$ et $\pi_2$, en donnant votre réponse au degré le plus près.

**2.** [Note maximale : 6]

L'envergure d'une certaine espèce d'oiseau peut être modélisée par une distribution normale de moyenne $60{,}2\,\text{cm}$ et d'écart-type $2{,}4\,\text{cm}$.

Selon ce modèle, $99\,\%$ des envergures sont supérieures à $x$ cm.

(a) Trouvez la valeur de $x$. [2]

Lors d'une expérience sur le terrain, une équipe de recherche étudie un grand échantillon de ces oiseaux. L'envergure de chaque oiseau a été mesurée à $0{,}1\,\text{cm}$.

(b) Trouvez la probabilité qu'un oiseau choisi au hasard possède une envergure mesurée de $60{,}2\,\text{cm}$. [4]

**3.** [Note maximale : 8]

Les droites $l_1$ et $l_2$ sont définies par

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-2}$$

$$l_2 : \frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-12}{6}.$$

Le plan $\pi$ contient les deux droites $l_1$ et $l_2$.

(a) Trouvez l'équation cartésienne de $\pi$. [4]

La droite $l_3$, passant par le point $(4\,;0\,;8)$, est perpendiculaire à $\pi$.

(b) Trouvez les coordonnées du point auquel $l_3$ coupe $\pi$. [4]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**4.** [Note maximale : 6]

Considérez $p(x) = 3x^3 + ax + 5a$, $a \in \mathbb{R}$.

Le polynôme $p(x)$ laisse un reste de $-7$ lorsqu'il est divisé par $(x - a)$.

Montrez qu'une seule valeur de $a$ satisfait la condition ci-dessus et indiquez sa valeur.

**5.** [Note maximale : 9]

Le septième, troisième et premier termes d’une suite arithmétique constituent les trois premiers termes d’une suite géométrique.

Le premier terme de la suite arithmétique est $a$ et sa raison $d$ est non nulle.

(a) Montrez que $d = \frac{a}{2}$. [3]

Le septième terme de la suite arithmétique est $3$. La somme des $n$ premiers termes de la suite arithmétique excède la somme des $n$ premiers termes de la suite géométrique d’au moins $200$.

(b) Trouvez la plus petite valeur de $n$ pour laquelle cela se produit. [6]

**6.** [Note maximale : 7]

Une particule se déplace sur une ligne droite de sorte que sa vitesse, $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, au temps $t$ secondes, est donnée par

$$v(t) = \begin{cases} 5-(t-2)^2, & 0 \le t \le 4 \\ 3-\dfrac{t}{2}, & t > 4 \end{cases}.$$

(a) Trouvez la valeur de $t$ à l'instant où la particule est au repos. [2]

La particule revient à sa position initiale lorsque $t = T$.

(b) Trouvez la valeur de $T$. [5]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**7.** [Note maximale : 8]

La compacité est une mesure du niveau de compression d'une région fermée.

La compacité, $C$, d'une région fermée peut être définie par $C = \frac{4A}{\pi d^2}$, où $A$ est l'aire de la région et $d$ est la distance maximale entre deux points quelconques de la région.

Pour une région circulaire, $C = 1$.

Considérez un polygone régulier à $n$ côtés construit de façon à ce que ses sommets se trouvent sur la circonférence d'un cercle dont le diamètre est de $x$ unités.

(a) Si $n > 2$ et pair, montrez que $C = \frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}$. [3]

Si $n > 1$ et impair, on peut montrer que $C = \frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$.

(b) Trouvez le polygone régulier ayant le plus petit nombre de côtés pour lequel la compacité est supérieure à $0{,}99$. [4]

(c) Commentez brièvement si $C$ constitue une bonne mesure de la compacité. [1]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

## Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

**8.** [Note maximale : 12]

Considérez le triangle PQR où $\text{Q}\hat{\text{P}}\text{R} = 30^\circ$, $\text{PQ} = (x+2)\,\text{cm}$ et $\text{PR} = (5-x)^2\,\text{cm}$, où $-2 < x < 5$.

(a) Montrez que l’aire, $A\ \text{cm}^2$, du triangle est donnée par $A = \frac{1}{4}\left(x^3 - 8x^2 + 5x + 50\right)$. [2]

(b) (i) Indiquez $\frac{\text{d}A}{\text{d}x}$.

(ii) Vérifiez que $\frac{\text{d}A}{\text{d}x} = 0$ lorsque $x = \frac{1}{3}$. [3]

(c) (i) Trouvez $\frac{\text{d}^2 A}{\text{d}x^2}$ et à partir de là, justifiez que lorsque $x = \frac{1}{3}$, l’aire du triangle PQR est maximale.

(ii) Indiquez l’aire maximale du triangle PQR.

(iii) Trouvez QR lorsque l’aire du triangle PQR est maximale. [7]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

**9.** [Note maximale : 10]

Le nombre de plaintes que reçoit par jour le service à la clientèle d’un grand magasin suit une distribution de Poisson de moyenne $0{,}6$.

(a) Lors d’une journée choisie au hasard, trouvez la probabilité

(i) qu’il n’y ait aucune plainte ;

(ii) qu’il y ait au moins trois plaintes. [3]

(b) Lors d’une semaine de cinq jours choisie au hasard, trouvez la probabilité qu’il n’y ait aucune plainte. [2]

(c) Lors d’une journée choisie au hasard, trouvez le nombre de plaintes le plus probable. Justifiez votre réponse. [3]

Le grand magasin met en place une nouvelle politique afin d’améliorer le service à la clientèle. Le nombre de plaintes reçues par jour suit maintenant une distribution de Poisson de moyenne $\lambda$.

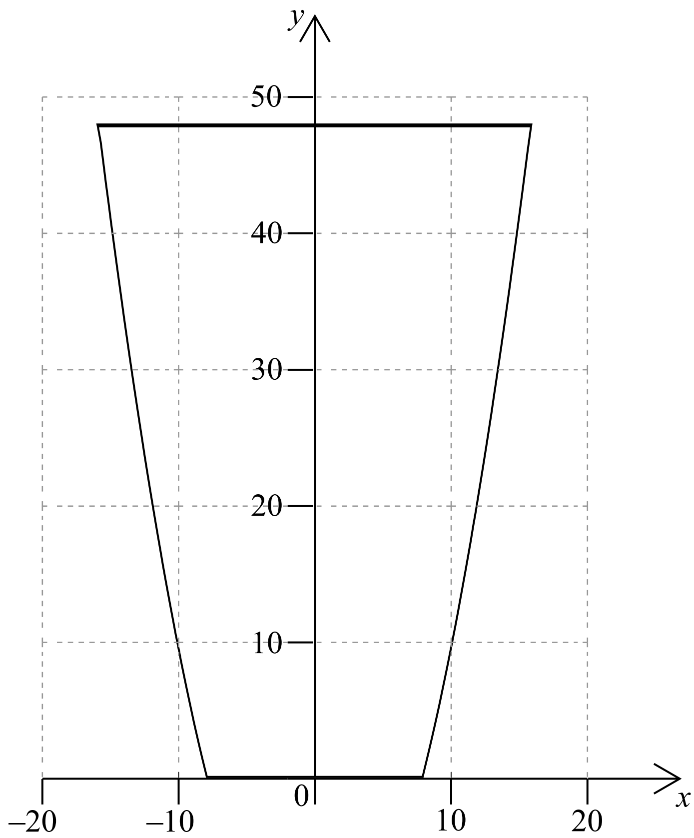
Lors d’une journée choisie au hasard, la probabilité qu’il n’y ait aucune plainte est maintenant de $0{,}8$.

(d) Trouvez la valeur de $\lambda$. [2]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

**10.** [Note maximale : 17]

La coupe transversale verticale d’un récipient est montrée dans le diagramme suivant.




Les côtés incurvés de la coupe transversale sont décrits par l’équation $y = 0,25x^2 - 16$. Les coupes transversales horizontales sont circulaires. La hauteur du récipient est de $48\,\text{cm}$.

(a) Si le récipient est rempli d’eau jusqu’à une hauteur de $h$ cm, montrez que le volume, $V\,\text{cm}^3$, de l’eau est donné par $V = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$. [3]

**(Suite de la question à la page suivante)**

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

**(Suite de la question 10)**

Le récipient, initialement rempli d’eau, commence à couler par un petit trou à un taux donné par $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$, où $t$ est mesuré en secondes.

(b) (i) Montrez que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$.

(ii) Indiquez $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}h}$ et, à partir de là, montrez que

$$t = \frac{-4\pi^2}{250}\int\left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}h.$$

(iii) Trouvez, à la minute la plus près, le temps que prendra le récipient à se vider complètement. ($60$ secondes = $1$ minute) [11]

Une fois vide, de l’eau est pompée à nouveau dans le récipient au taux de $8{,}5\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$.

Pendant ce temps, l’eau continue à couler du récipient au taux de $\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$.

(c) En utilisant une esquisse graphique appropriée, déterminez à quelle hauteur l’eau finira par se stabiliser dans le récipient. [3]

N’écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.

**11.** [Note maximale : 11]

Dans le triangle $\mathrm{ABC}$,

$$3\sin B + 4\cos C = 6 \text{ et}$$
$$4\sin C + 3\cos B = 1\,.$$

(a) Montrez que $\sin(B+C) = \frac{1}{2}$. [6]

Robert émet la conjecture que $\mathrm{C\hat{A}B}$ peut avoir deux valeurs possibles.

(b) Montrez que la conjecture de Robert est erronée en prouvant que $\mathrm{C\hat{A}B}$ ne peut avoir qu’une seule valeur. [5]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

# Barème de notation

## Spécimen
## (adapté de la session de novembre 2014)

## Mathématiques

## Niveau supérieur

## Épreuve 2

16 pages

## Instructions pour les examinateurs

### Abréviations

***M*** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes du raisonnement doivent être visibles.

***(M)*** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.

***A*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points ***M*** qui précèdent.

***(A)*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.

***R*** Points attribués pour un **raisonnement** clair.

***N*** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes ne sont **pas** visibles.

***AG*** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

### Utilisation du barème

**1 Généralités**

Corrigez selon les instructions de RM™ Assessor et selon le document intitulé « **Mathématiques NS – Directives concernant la notation électronique, mai 2016** ». Il est essentiel de lire ce dernier avant de commencer vos corrections. En particulier, veuillez noter les points suivants.

- Les points doivent être enregistrés à l'aide des annotations spécifiées. Veuillez vérifier de bien saisir les points pour la bonne question.
- Si une partie est **complètement correcte** (et obtient donc tous les points pour le raisonnement devant être visible), utilisez les coches avec des nombres pour attribuer la totalité des points.
- Si une partie est complètement fausse, mettez ***A0*** à côté de la réponse finale.
- Si vous attribuez toute autre chose à une partie, vous **devez** l'enregistrer à l'aide de **toutes** les annotations.
- Tous les points doivent être additionnés et enregistrés par RM™ Assessor.

**2 Points pour la méthode et la réponse/précision**

- N'attribuez **pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer ***M0*** suivi de ***A1***, puisque le ou les points ***A*** dépendent du ou des points ***M*** précédents, s'il y en a.
- Lorsque des points ***M*** et des points ***A*** sont marqués sur la même ligne, par exemple ***M1A1***, cela signifie habituellement ***M1*** pour avoir **tenté** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple substitution dans une formule) et ***A1*** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise ***(M2)***, ***N3***, etc., ne fractionnez **pas** ces points.

- Lorsque vous voyez une réponse correcte à une question ou à une partie de question, ignorez le travail correct qui suit. Cependant, si le travail qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier point ***A1***. Une exception peut être faite dans le cas de réponses numériques, lorsqu'une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Toutefois, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une autre partie, et si un raisonnement correct ***FT*** est présent, attribuez les points ***FT*** le cas échéant mais n'attribuez pas le dernier point ***A1*** dans cette partie.

  Exemples

| | **Réponse correcte présente** | **Raisonnement qui suit présent** | **Action** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $8\sqrt{2}$ | $5{,}65685\ldots$ (valeur décimale incorrecte) | Attribuez le dernier point ***A1*** *(ignorez le travail qui suit)* |
| **2.** | $\frac{1}{4}\sin 4x$ | $\sin x$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |
| **3.** | $\log a - \log b$ | $\log(a-b)$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |

## 3 Points *N*

*Attribuez des points **N** pour des réponses **correctes** si le raisonnement n'est **pas** visible.*

- N'attribuez **pas** un mélange de points ***N*** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points ***N*** possibles que le total des points ***M***, ***A*** et ***R*** ; ceci est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas les instructions, à savoir de montrer les étapes de leur travail.

## 4 Points implicites

*Les points implicites apparaissent entre **parenthèses, par exemple (M1)**, et ils ne peuvent être attribués que s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.*

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

## 5 Points de suivi

*Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans la ou les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT, il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, obtenue à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points ***FT***, à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points ***A*** **dépendants** ne peut être attribué, mais des points ***M*** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

## 6 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière. Utilisez **MR** pour indiquer qu'il s'agit d'une erreur de lecture. Puis déduisez le premier des points à attribuer, même si c'est un point **M**, mais attribuez tous les autres points de sorte que le candidat ne perd qu'un seul point.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture, accordez alors moins de points, à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1,5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.

## 7 Points discrétionnaires *(d)*

*Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Dans de tels cas, il convient d'utiliser l'annotation **(d)** et de rédiger un bref commentaire à côté du point afin d'expliquer sa décision.*

## 8 Autres méthodes

*Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.*

- Des autres méthodes possibles pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, *etc.*
- Des autres solutions possibles pour une partie de question sont indiquées par **SOIT … SOIT**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi une mise en page particulière (avec des alignements) pour aider les examinateurs à reconnaître où ces autres solutions commencent et finissent.

## 9 Autres formes

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes possibles de **notation**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses, immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

**Exemple** : pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x-3)$, le barème de notation propose:

$f'(x) = \left(2\cos(5x-3)\right)5 \quad \left(= 10\cos(5x-3)\right)$ ***A1***

Attribuez ***A1*** pour $\left(2\cos(5x-3)\right)5$, même si $10\cos(5x-3)$ n'est pas visible.

## 10 Précision des réponses

*Les candidats **NE** doivent **PLUS** être pénalisés pour une erreur de précision (**AP**).*

*Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera prévu pour avoir donné la réponse à la précision demandée. Lorsque le niveau de précision n'est pas spécifié dans la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près. Veuillez soigneusement vérifier le travail des candidats pour les points **FT**.*

## 11 Travail barré

*Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou s'il a barré son travail d'une autre façon, n'attribuez aucun point pour ce travail.*

## 12 Calculatrice

*Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 2, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (par exemple, la TI-89) ne sont pas autorisées.*

**Notation de type calculatrice**
On peut lire dans le *Guide de mathématiques NS* :

*Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.*

N'acceptez **pas** des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

## 13 Plusieurs solutions

*Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examinateur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.*

## 14 Travail du candidat

Les candidats sont supposés rédiger les réponses à la section A sur les épreuves d'examen (dans les cases prévues à cet effet) et les réponses à la section B dans le livret de réponses. Il arrive parfois que les candidats aient besoin de plus de place pour rédiger leurs réponses à la section A et ils utilisent alors le livret (et souvent ils le mentionnent sur leurs épreuves d'examen) ou poursuivent leur raisonnement en dehors des cases prévues pour leurs réponses. Il convient de corriger ce travail.

Les instructions stipulent que les candidats ne doivent pas écrire sur la section B des épreuves d'examen. Par conséquent, les candidats ont pu utiliser cet espace comme brouillon, en supposant que ce travail sera ignoré. Si les candidats ont écrit leurs réponses dans les livrets de réponses, il n'y a pas lieu de regarder les épreuves d'examen. Cependant, s'il manque des questions entières ou des parties de question dans les livrets de réponses, veuillez vérifier qu'elles ne se trouvent pas sur les épreuves d'examen. Si elles se trouvent sur les épreuves d'examen, veuillez corriger les questions ou les parties de solutions qui ne sont pas dans les livrets de réponses.

## Section A

**1.** $\boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ***(A1)(A1)***

utilisation de $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{n}_1 \bullet \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$ ***(M1)***

$\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}} \left( = \dfrac{7}{\sqrt{399}} \right)$ ***(A1)(A1)***

**Note :** Attribuez ***A1*** pour un numérateur correct et ***A1*** pour un dénominateur correct.

$\theta = 69^\circ$ ***A1***

**Note :** Attribuez ***A1*** pour $111^\circ$.

***[6 points]***

**2.** (a) $\mathrm{P}(X > x) = 0{,}99 \quad (= \mathrm{P}(X < x) = 0{,}01)$ ***(M1)***

$\Rightarrow x = 54{,}6\,(\mathrm{cm})$ ***A1***

***[2 points]***

(b) $\mathrm{P}(60{,}15 \le X \le 60{,}25)$ ***(M1)(A1)(A1)***

$= 0{,}0166$ ***A1***

***[4 points]***

***Total [6 points]***

**3.** (a) pour avoir tenté de trouver un vecteur normal à $\pi$, par exemple $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ ***(M1)***

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***(A1)***

$\boldsymbol{r} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***M1***

$2x - 2y + z = 4$ (ou l'équivalent) ***A1***

***[4 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 3*

(b) $l_3 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ***(A1)***

pour avoir tenté de résoudre $\begin{pmatrix} 4+2t \\ -2t \\ 8+t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$ pour $t$ c'est-à-dire

$9t + 16 = 4$ pour $t$ ***M1***

$t = -\frac{4}{3}$ ***A1***

$\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{20}{3}\right)$ ***A1***

***[4 points]***

***Total [8 points]***

**4.** utilisation de $p(a) = -7$ pour obtenir $3a^3 + a^2 + 5a + 7 = 0$ ***M1A1***

$(a+1)(3a^2 - 2a + 7) = 0$ ***(M1)(A1)***

| | |
|---|---|
| **Note :** | Attribuez ***M1*** pour la représentation graphique d'une fonction cubique dont la forme est correcte et ***A1*** pour avoir montré clairement que la fonction cubique ci-dessus coupe l'axe des abscisses au point $(-1; 0)$ seulement. |

$a = -1$ ***A1***

**SOIT**

en montrant que $3a^2 - 2a + 7 = 0$ n'admet pas de solution réelle (deux complexes) pour $a$ ***R1***

**SOIT**

en montrant que $3a^3 + a^2 + 5a + 7 = 0$ admet une solution réelle (et deux complexes) pour $a$ ***R1***

| | |
|---|---|
| **Note :** | Attribuez ***R1*** pour des solutions qui font spécifiquement référence à une représentation graphique appropriée. |

***Total [6 points]***

**5.** (a) utilisation de $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$ pour établir $\frac{a+2d}{a+6d} = \frac{a}{a+2d}$ ***(M1)***

$a(a+6d) = (a+2d)^2$ ***A1***

$2d(2d - a) = 0$ (ou l'équivalent) ***A1***

puisque $d \neq 0 \Rightarrow d = \frac{a}{2}$ ***AG***

***[3 points]***

(b) en remplaçant $d = \frac{a}{2}$ dans $a + 6d = 3$ et en résolvant pour $a$ et $d$ ***(M1)***

$a = \frac{3}{4}$ et $d = \frac{3}{8}$ ***(A1)***

$r = \frac{1}{2}$ ***A1***

$$\frac{n}{2}\left(2 \times \frac{3}{4} + (n-1)\frac{3}{8}\right) - \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} \geq 200$$ ***(A1)***

pour avoir tenté de résoudre pour $n$ ***(M1)***

$n \geq 31,68 \ldots$

la plus petite valeur de $n$ est donc $32$ ***A1***

***[6 points]***

***Total [9 points]***

**6.** (a) $3 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = 6\,(\text{s})$ ***(M1)A1***

***[2 points]***

| |
|---|
| **Note :** Attribuez ***A0*** si $t = -0{,}236$ ou $t = 4{,}24$ ou si les deux équations sont indiquées avec $t = 6$. |

(b) soit $d$ la distance parcourue avant d'atteindre le repos

$d = \int_0^4 5 - (t-2)^2 \, \mathrm{d}t + \int_4^6 3 - \frac{t}{2} \mathrm{d}t$ ***(M1)(A1)***

| |
|---|
| **Note :** Attribuez ***M1*** pour deux intégrales correctes, même si les bornes d'intégration sont incorrectes. La deuxième intégrale peut être donnée comme l'aire d'un triangle. |

$d = \frac{47}{3}\,(= 15{,}7)\,(\text{m})$ ***(A1)***

pour avoir tenté de résoudre $\int_6^T \left(\frac{t}{2} - 3\right) \mathrm{d}t = \frac{47}{3}$ (ou l'équivalent) pour $T$ ***M1***

$T = 13{,}9\,(\text{s})$ ***A1***

***[5 points]***

***Total [7 points]***

**7.** (a) l'aire de chaque triangle est $\frac{1}{8} x^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ $\left(\text{utilisation de } \frac{1}{2} ab \sin C\right)$ ***(M1)***

il y a $n$ triangles, donc $A = \frac{1}{8} n x^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ ***A1***

$C = \frac{4\left(\frac{1}{8} n x^2 \sin \frac{2\pi}{n}\right)}{\pi x^2}$ ***A1***

donc $C = \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$ ***AG***

***[3 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 7*

(b) pour avoir tenté de trouver la plus petite valeur de *n* telle que

$\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n} > 0,99$ ***(M1)***

$n = 26$ ***A1***

pour avoir tenté de trouver la plus petite valeur de *n* telle que

$\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)} > 0,99$ ***(M1)***

$n = 21$ et donc un polygone régulier à $21$ côtés ***A1***

**Note :** Attribuez ***(M0)A0(M1)A1*** si $\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n} > 0,99$ n'est pas considéré et $\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)} > 0,99$ est correctement considéré.
Attribuez ***(M1)A1(M0)A0*** pour $n = 26$.

***[4 points]***

(c) **SOIT**

pour des valeurs paires et impaires de *n*, la valeur de *C* semble augmenter vers la valeur limite du cercle $(C = 1)$, c'est-à-dire,
lorsque *n* augmente, les régions polygonales s'approchent de plus en plus de la région circulaire qui les délimite ***R1***

**SOIT**

les différences entre les valeurs paires et impaires de *n* illustrent que cette mesure de la compacité ne constitue pas une bonne mesure ***R1***

***[1 point]***

***Total [8 points]***

## Section B

**8.** (a) utilisation de $A = \frac{1}{2}qr\sin\theta$ pour obtenir $A = \frac{1}{2}(x+2)(5-x)^2\sin 30^\circ$ ***M1***

$= \frac{1}{4}(x + 2)(25 - 10x + x^2)$ ***A1***

$A = \frac{1}{4}(x^3 - 8x^2 + 5x + 50)$ ***AG***

***[2 points]***

(b) (i) $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\left(3x^2 - 16x + 5\right)\left(= \frac{1}{4}(3x-1)(x-5)\right)$ ***A1***

(ii) **MÉTHODE 1**

**SOIT**

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\left(3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 16\left(\frac{1}{3}\right) + 5\right) = 0$ ***M1A1***

**SOIT**

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}\left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right) - 5\right) = 0$ ***M1A1***

**PUIS**

donc $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ lorsque $x = \frac{1}{3}$ ***AG***

**MÉTHODE 2**

en résolvant $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ pour $x$ ***M1***

$-2 < x < 5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ***A1***

donc $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ lorsque $x = \frac{1}{3}$ ***AG***

**MÉTHODE 3**

une représentation graphique correcte de $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$ en fonction de $x$ ***M1***

la représentation graphique montre clairement que $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$

lorsque $x = \frac{1}{3}$ ***A1***

donc $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ lorsque $x = \frac{1}{3}$ ***AG***

***[3 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 8*

(c) (i) $\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2}(3x - 8)$ ***A1***

pour $x = \frac{1}{3}$, $\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} = -3,5 (< 0)$ ***R1***

donc $x = \frac{1}{3}$ donne l'aire maximale du triangle PQR ***AG***

(ii) $A_{\max} = \frac{343}{27} (= 12,7)\,(\mathrm{cm}^2)$ ***A1***

(iii) $\mathrm{PQ} = \frac{7}{3}(\mathrm{cm})$ et $\mathrm{PR} = \left(\frac{14}{3}\right)^2 (\mathrm{cm})$ ***(A1)***

$\mathrm{QR}^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{14}{3}\right)^2 \cos 30^\circ$ ***(M1)(A1)***

$= 391,702\ldots$

$\mathrm{QR} = 19,8\,(\mathrm{cm})$ ***A1***

***[7 points]***

***Total [12 points]***

**9.**

(a) (i) $\mathrm{P}(X = 0) = 0,549 \left(= \mathrm{e}^{-0,6}\right)$ ***A1***

(ii) $\mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2)$ ***(M1)***

$\mathrm{P}(X \geq 3) = 0,0231$ ***A1***

***[3 points]***

(b) **SOIT**

utilisation de $Y \sim \mathrm{Po}(3)$ ***(M1)***

**SOIT**

utilisation de $(0,549)^5$ ***(M1)***

**SOIT**

$\mathrm{P}(Y = 0) = 0,0498 \left(= \mathrm{e}^{-3}\right)$ ***A1***

***[2 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 9*

(c) $P(X = 0)$ (le nombre de plaintes le plus probable est zéro) ***A1***

**SOIT**

en calculant $P(X = 0) = 0,549$ et $P(X = 1) = 0,329$ ***M1A1***

**SOIT**

en esquissant une représentation graphique (discrète) appropriée de $P(X = x)$ en fonction de $x$ ***M1A1***

**SOIT**

en trouvant $P(X = 0) = e^{-0,6}$ et en indiquant que $P(X = 0) > 0,5$ ***M1A1***

**SOIT**

en utilisant $P(X = x) = P(X = x-1) \times \frac{\mu}{x}$ où $\mu < 1$ ***M1A1***

***[3 points]***

(d) $P(X = 0) = 0,8 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0,8$ ***(A1)***

$\lambda = 0,223 \left( = \ln\frac{5}{4}, = -\ln\frac{4}{5} \right)$ ***A1***

***[2 points]***

***Total [10 points]***

**10.** (a) pour avoir tenté d'utiliser $V = \pi\int_a^b x^2 \mathrm{d}y$ ***(M1)***

pour avoir tenté d'exprimer $x^2$ en fonction de $y$ c'est-à-dire $x^2 = 4(y+16)$ ***(M1)***

pour $y = h$, $V = 4\pi\int_0^h y + 16\,\mathrm{d}y$ ***A1***

$V = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$ ***AG***

***[3 points]***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 10*

(b) (i) **MÉTHODE 1**

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V} \times \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$ ***(M1)***

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = 4\pi(h+16)$$ ***(A1)***

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi(h+16)} \times \frac{-250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$$ ***M1A1***

**Note :** Attribuez ***M1*** pour avoir remplacé dans $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V} \times \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$$ ***AG***

**MÉTHODE 2**

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi(h+16)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$ (dérivation implicite) ***(M1)***

$$\frac{-250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 4\pi(h+16)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$ (ou l'équivalent) ***A1***

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi(h+16)} \times \frac{-250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$$ ***M1A1***

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$$ ***AG***

(ii) $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}h} = -\frac{4\pi^2(h+16)^2}{250\sqrt{h}}$$ ***A1***

$$t = \int -\frac{4\pi^2(h+16)^2}{250\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h$$ ***(M1)***

$$t = \int -\frac{4\pi^2(h^2+32h+256)}{250\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h$$ ***A1***

$$t = \frac{-4\pi^2}{250}\int\left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}h$$ ***AG***

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 10*

(iii) **MÉTHODE 1**

$t = \int_{48}^{0} \left( h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}} \right) \mathrm{d}h$ ***(M1)(A1)***

$t = 2688,756\ldots$ (s) ***(A1)***

45 minutes (correctement arrondie à la minute la plus près) ***A1***

**MÉTHODE 2**

$t = \frac{-4\pi^2}{250} \left( \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{3} h^{\frac{3}{2}} + 512h^{\frac{1}{2}} \right) + c$ ***A1***

$t = 0, h = 48 \Rightarrow c = 2688,756\ldots \left( c = \frac{4\pi^2}{250} \left( \frac{2}{5} \times 48^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{3} \times 48^{\frac{3}{2}} + 512 \times 48^{\frac{1}{2}} \right) \right)$

***(M1)***

$t = 2688,756\ldots \left( t = \frac{4\pi^2}{250} \left( \frac{2}{5} \times 48^{\frac{5}{2}} + \frac{64}{3} \times 48^{\frac{3}{2}} + 512 \times 48^{\frac{1}{2}} \right) \right)$ (s) ***(A1)***

45 minutes (correctement arrondie à la minute la plus près) ***A1***

***[11 points]***

(c) **SOIT**

la hauteur se stabilise lorsque $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$, c'est-à-dire $8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 0$ ***R1***

pour avoir tenté de résoudre $8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} = 0$ pour $h$ ***(M1)***

**SOIT**

la hauteur se stabilise lorsque $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0$

c'est-à-dire $\frac{1}{4\pi(h+16)} \left( 8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \right) = 0$ ***R1***

pour avoir tenté de résoudre $\frac{1}{4\pi(h+16)} \left( 8,5 - \frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)} \right) = 0$ pour $h$ ***(M1)***

**PUIS**

$h = 5,06$ (cm) ***A1***

***[3 points]***

***Total [17 points]***

**11.** (a) en élevant les deux équations au carré ***M1***

$9\sin^2 B + 24\sin B\cos C + 16\cos^2 C = 36$ ***(A1)***

$9\cos^2 B + 24\cos B\sin C + 16\sin^2 C = 1$ ***(A1)***

en additionnant les équations et en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour obtenir $9 + 24(\sin B\cos C + \cos B\sin C) + 16 = 37$ ***M1***

$24(\sin B\cos C + \cos B\sin C) = 12$ ***A1***

$24\sin(B + C) = 12$ ***(A1)***

$\sin(B + C) = \frac{1}{2}$ ***AG***

***[6 points]***

(b) $\sin A = \sin\left(180^\circ - (B + C)\right)$ donc $\sin A = \sin(B + C)$ ***R1***

$\sin(B + C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$ ***A1***

$\Rightarrow A = 30^\circ$ ou $A = 150^\circ$ ***A1***

**Note :** Attribuez ***R1A1A1*** pour avoir obtenu $B + C = 30^\circ$ ou $B + C = 150^\circ$.

si $A = 150^\circ$, alors $B < 30^\circ$ ***R1***

par exemple, $3\sin B + 4\cos C < \left(\frac{3}{2} + 4\right) < 6$, c'est-à-dire une contradiction ***R1***

une seule valeur possible $(A = 30^\circ)$ ***AG***

***[5 points]***

***Total [11 points]***

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

**Mathématiques**
**Niveau supérieur**
**Épreuve 3 – mathématiques discrètes**

SPÉCIMEN (adapté de la session de novembre 2014)

1 heure

---

**Instructions destinées aux candidats**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n’a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l’aide d’une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d’un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

**1.** [Note maximale : 8]

Soit $f(n) = n^5 - n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Trouvez les valeurs de $f(3)$ et $f(4)$. [1]

(b) Utilisez l’algorithme euclidien pour trouver $\mathrm{pgcd}\left(f(3), f(4)\right)$. [2]

(c) Utilisez le petit théorème de Fermat pour expliquer pourquoi $f(n)$ est toujours exactement divisible par $5$. [1]

(d) En factorisant $f(n)$, expliquez pourquoi celle-ci est toujours exactement divisible par $6$. [4]

**2.** [Note maximale : 8]

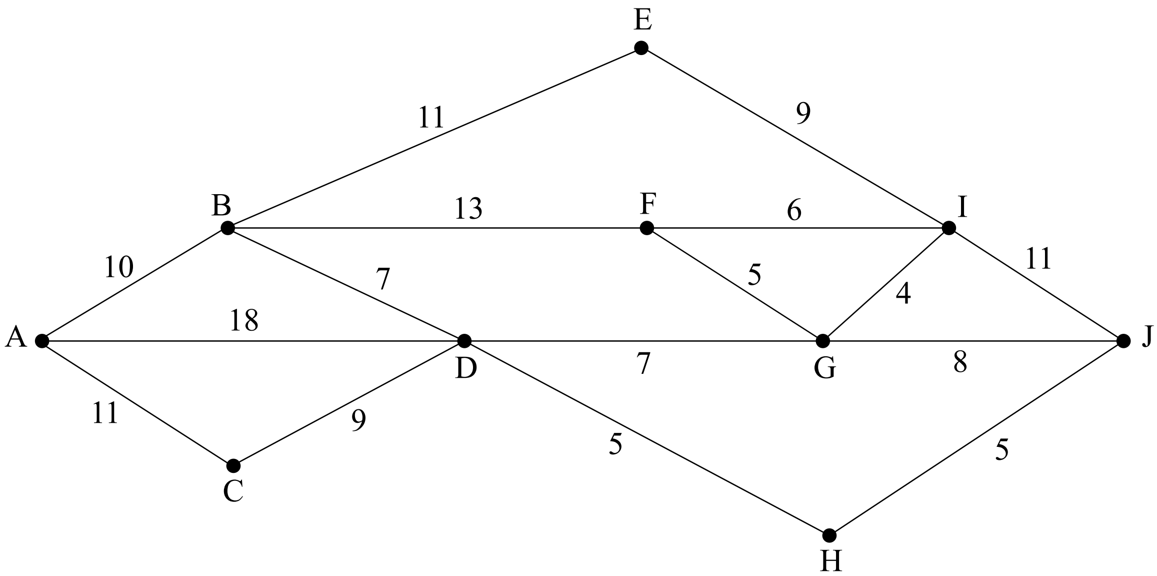
(a) Utilisez le principe des tiroirs pour prouver que pour tout graphe simple ayant deux sommets ou plus et dans lequel tout sommet est connecté à au moins un autre sommet, il doit y avoir au moins deux sommets de même degré. [4]

Il y a dix-sept personnes qui participent à une réunion.

(b) Chaque personne serre la main d’au moins une autre personne et personne ne serre la main de la même personne plus d’une fois. Utilisez le résultat de la partie (a) pour montrer qu’il doit y avoir au moins deux personnes qui serrent la main du même nombre de personnes. [4]

**3.** [Note maximale : 13]

Le graphe suivant représente le coût, en dollars, d'un voyage en autocar entre 10 villes d'une certaine province.




(a) Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour trouver la route la moins chère entre $\mathrm{A}$ et $\mathrm{J}$, et indiquez son coût. [7]

Pour le reste de la question, vous pouvez trouver la route la moins chère entre deux villes données par inspection.

Il est établi que le coût total pour passer par tous les chemins, sans en répéter aucun, est de $139\ \$$. Un touriste décide de passer par tous les chemins au moins une fois, en partant de la ville $\mathrm{A}$ et en y retournant.

(b) Trouvez le plus petit coût possible de son voyage, en indiquant clairement les chemins qui doivent être empruntés plus d'une fois. Vous devez justifier entièrement votre réponse. [6]

**4.** [Note maximale : 10]

(a) Résolvez, par n'importe quelle méthode, le système de congruences linéaires suivant

$$x \equiv 9 \pmod{11}$$
$$x \equiv 1 \pmod{5}.$$
[3]

(b) Trouvez le reste lorsque $41^{82}$ est divisé par $11$. [4]

(c) En utilisant vos réponses des parties (a) et (b), trouvez le reste lorsque $41^{82}$ est divisé par $55$. [3]

**5.** [Note maximale : 11]

Andy et Roger jouent au tennis avec une règle stipulant que si l'un d'eux gagne un jeu lors de son service, alors il conserve son service et s'il perd un jeu lors de son service, alors l'autre joueur reprend le service.

La probabilité qu'Andy gagne un jeu lorsqu'il est au service est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité qu'il gagne un jeu lorsqu'il ne sert pas est de $\frac{1}{4}$. Andy sert lors du premier jeu. Soit $u_n$ la probabilité qu'Andy gagne le $n^{\text{ième}}$ jeu.

(a) Indiquez la valeur de $u_1$. [1]

(b) Montrez que $u_n$ satisfait la relation de récurrence

$$u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}.$$ [4]

(c) Résolvez cette relation de récurrence pour trouver la probabilité qu'Andy gagne le $n^{\text{ième}}$ jeu. [6]

# Barème de notation

## Spécimen
## (adapté de la session de novembre 2014)

## Mathématiques discrètes

## Niveau supérieur

## Épreuve 3

## Instructions pour les examinateurs

### Abréviations

***M*** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes du raisonnement doivent être visibles.

***(M)*** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.

***A*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points ***M*** qui précèdent.

***(A)*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.

***R*** Points attribués pour un **raisonnement** clair.

***N*** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes ne sont **pas** visibles.

***AG*** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

### Utilisation du barème

**1 Généralités**

Corrigez selon les instructions de RM™ Assessor et selon le document intitulé « **Mathématiques NS – Directives concernant la notation électronique, mai 2016** ». Il est essentiel de lire ce dernier avant de commencer vos corrections. En particulier, veuillez noter les points suivants.

- Les points doivent être enregistrés à l'aide des annotations spécifiées. Veuillez vérifier de bien saisir les points pour la bonne question.
- Si une partie est **complètement correcte** (et obtient donc tous les points pour le raisonnement devant être visible), utilisez les coches avec des nombres pour attribuer la totalité des points.
- Si une partie est complètement fausse, mettez ***A0*** à côté de la réponse finale.
- Si vous attribuez toute autre chose à une partie, vous **devez** l'enregistrer à l'aide de **toutes** les annotations.
- Tous les points doivent être additionnés et enregistrés par RM™ Assessor.

**2 Points pour la méthode et la réponse/précision**

- N'attribuez **pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer ***M0*** suivi de ***A1***, puisque le ou les points ***A*** dépendent du ou des points ***M*** précédents, s'il y en a.
- Lorsque des points ***M*** et des points ***A*** sont marqués sur la même ligne, par exemple ***M1A1***, cela signifie habituellement ***M1*** pour avoir **tenté** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple substitution dans une formule) et ***A1*** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise ***(M2)***, ***N3***, etc., ne fractionnez **pas** ces points.

- Lorsque vous voyez une réponse correcte à une question ou à une partie de question, ignorez le travail correct qui suit. Cependant, si le travail qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier point ***A1***. Une exception peut être faite dans le cas de réponses numériques, lorsqu'une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Toutefois, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une autre partie, et si un raisonnement correct ***FT*** est présent, attribuez les points ***FT*** le cas échéant mais n'attribuez pas le dernier point ***A1*** dans cette partie.

  Exemples

| | **Réponse correcte présente** | **Raisonnement qui suit présent** | **Action** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $8\sqrt{2}$ | $5{,}65685\ldots$ (valeur décimale incorrecte) | Attribuez le dernier point ***A1*** *(ignorez le travail qui suit)* |
| **2.** | $\frac{1}{4}\sin 4x$ | $\sin x$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |
| **3.** | $\log a - \log b$ | $\log(a-b)$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |

## 3 Points *N*

*Attribuez des points **N** pour des réponses **correctes** si le raisonnement n'est **pas** visible.*

- N'attribuez **pas** un mélange de points ***N*** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points ***N*** possibles que le total des points ***M***, ***A*** et ***R*** ; ceci est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas les instructions, à savoir de montrer les étapes de leur travail.

## 4 Points implicites

*Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, **par exemple (M1)**, et ils ne peuvent être attribués que s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.*

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

## 5 Points de suivi

*Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans la ou les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT, il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, obtenue à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points ***FT***, à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points ***A*** **dépendants** ne peut être attribué, mais des points ***M*** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

## 6 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière. Utilisez **MR** pour indiquer qu'il s'agit d'une erreur de lecture. Puis déduisez le premier des points à attribuer, même si c'est un point **M**, mais attribuez tous les autres points de sorte que le candidat ne perd qu'un seul point.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture, accordez alors moins de points, à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1,5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.

## 7 Points discrétionnaires *(d)*

*Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Dans de tels cas, il convient d'utiliser l'annotation **(d)** et de rédiger un bref commentaire à côté du point afin d'expliquer sa décision.*

## 8 Autres méthodes

*Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.*

- Des autres méthodes possibles pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des autres solutions possibles pour une partie de question sont indiquées par **SOIT … SOIT**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi une mise en page particulière (avec des alignements) pour aider les examinateurs à reconnaître où ces autres solutions commencent et finissent.

## 9 Autres formes

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes possibles de **notation**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses, immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

**Exemple** : pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x-3)$, le barème de notation propose:

$f'(x) = \left(2\cos(5x-3)\right)5 \quad \left(=10\cos(5x-3)\right)$ ***A1***

Attribuez ***A1*** pour $\left(2\cos(5x-3)\right)5$, même si $10\cos(5x-3)$ n'est pas visible.

## 10 Précision des réponses

*Les candidats **NE** doivent **PLUS** être pénalisés pour une erreur de précision (**AP**).*

*Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera prévu pour avoir donné la réponse à la précision demandée. Lorsque le niveau de précision n'est pas spécifié dans la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près. Veuillez soigneusement vérifier le travail des candidats pour les points **FT**.*

## 11 Travail barré

*Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou s'il a barré son travail d'une autre façon, n'attribuez pas aucun point pour ce travail.*

## 12 Calculatrice

*Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (par exemple, la TI-89) ne sont pas autorisées.*

**Notation de type calculatrice**
On peut lire dans le *Guide de mathématiques NS* :

*Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.*

N'acceptez **pas** des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

## 13 Plusieurs solutions

*Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examinateur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.*

**1.** (a) $240, 1020$ ***A1***

| **Note :** Attribuez ***A2*** pour trois réponses correctes, ***A1*** pour deux réponses correctes. |
|---|

***[1 point]***

(b) $1020 = 240 \times 4 + 60$ ***(M1)***
$240 = 60 \times 4$
$\text{pgcd}(1020, 240) = 60$ ***A1***

***[2 points]***

| **Note :** Doit être fait par l'algorithme euclidien. |
|---|

(c) par le petit théorème de Fermat avec $p = 5$
$n^5 \equiv n \pmod 5$ ***A1***
donc 5 divise $f(n)$

***[1 point]***

(d) $f(n) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ***(A1)A1***
$n-1, n, n+1$ sont des entiers consécutifs, il y a donc un multiple de $2$ et un multiple de $3$ parmi eux ***R1R1***

| **Note :** Attribuez ***R1*** pour la justification de $2$ et ***R1*** pour la justification de $3$. |
|---|

et par conséquent , $f(n)$ est un multiple de $6$ ***AG***

***[4 points]***

***Total [8 points]***

**2.** (a) supposons que le graphe possède $v$ sommets alors, puisque
le graphe est simple, le degré de chaque sommet est $\le v-1$ ***A1***
le degré de chaque sommet est $\ge 1$ ***A1***
il y a donc $v-1$ valeurs possibles pour le degré de chaque sommet ***A1***
étant donné qu'il y a $v$ sommets, par le principe des tiroirs, il doit y en avoir au moins deux ayant le même degré ***R1***

***[4 points]***

(b) considérons un graphe où les personnes participant à la réunion sont représentées par les sommets et que deux sommets sont connectés si les deux personnes se serrent la main ***M1***
le graphe est simple puisque personne ne serre la main de la même personne plus d'une fois (et que les personnes ne peuvent se serrer la main elles-mêmes) ***A1***
chaque sommet est connecté à au moins un autre sommet, car chaque personne serre au moins une main ***A1***
le degré de chaque sommet correspond au nombre de poignées de main, donc par la preuve ci-dessus, il doit y avoir au moins deux personnes qui serrent le même nombre de mains ***R1***

***[4 points]***

***Total [8 points]***

**3.** (a) ***M1A1A1A1***

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\boxed{0}$ | 10 | 11 | 18 | | | | | | |
| B | | $\boxed{10}$ | | 17 | 21 | 23 | | | | |
| C | | | $\boxed{11}$ | | | | | | | |
| D | | | | $\boxed{17}$ | | | 24 | 22 | | |
| E | | | | | $\boxed{21}$ | | | | 30 | |
| H | | | | | | | | $\boxed{22}$ | | 27 |
| F | | | | | | $\boxed{23}$ | | | 29 | |
| G | | | | | | | $\boxed{24}$ | | 28 | |
| J | | | | | | | | | | $\boxed{27}$ |

(***M1*** pour une tentative de Dijkstra)
(***A1*** pour la valeur de $D = 17$)
(***A1*** pour la valeur de $H = 22$)
(***A1*** pour la valeur de $G = 24$)

la route est ABDHJ ***(M1)A1***

le coût est 27 $ ***A1***

**Note :** Acceptez d'autres schémas.

***[7 points]***

(b) il y a 4 sommets impairs A, D, F et J ***A1***

ces derniers peuvent être joints de 3 façons avec les coûts supplémentaires suivants

AD et FJ $17+13=30$

AF et DJ $23+10=33$

AJ et DF $27+12=39$ ***M1A1A1***

**Notes :** Attribuez ***M1*** pour avoir tenté de trouver différentes routes.
Attribuez ***A1A1*** pour des valeurs correctes pour les trois coûts et ***A1*** pour une valeur correcte.

il faut répéter AB, BD, FG et GJ ***A1***

le coût total est $139+30=169$ $ ***A1***

***[6 points]***

***Total [13 points]***

**4.** (a) **MÉTHODE 1**

pour avoir listé $9, 20, 31, \ldots$ et $1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, \ldots$ ***M1***

une solution est $31$ ***(A1)***

par le théorème du reste chinois, la solution complète est

$x \equiv 31 (\bmod 55)$ ***A1*** ***N2***

**MÉTHODE 2**

$x \equiv 9 (\bmod 11) \Rightarrow x = 9 + 11t$ ***M1***

$\Rightarrow 9 + 11t \equiv 1 (\bmod 5)$

$\Rightarrow t \equiv 2 (\bmod 5)$ ***A1***

$\Rightarrow t = 2 + 5s$

$\Rightarrow x = 9 + 11(2 + 5s)$

$\Rightarrow x = 31 + 55s \left(\Rightarrow x \equiv 31 (\bmod 55)\right)$ ***A1***

**Note :** Acceptez d'autres méthodes, par exemple, équation diophantienne.

**Note :** Acceptez d'autres réponses équivalentes, par exemple, $-79 (\bmod 55)$.

***[3 points]***

(b) $41^{82} \equiv 8^{82} (\bmod 11)$

par le petit théorème de Fermat $8^{10} \equiv 1 (\bmod 11)$ (ou $41^{10} \equiv 1 (\bmod 11)$ ) ***M1***

$8^{82} \equiv 8^{2} (\bmod 11)$ ***M1***

$\equiv 9 (\bmod 11)$ ***(A1)***

le reste est $9$ ***A1***

***[4 points]***

**Note :** Acceptez les simplifications effectuées sans Fermat.

(c) $41^{82} \equiv 1^{82} \equiv 1 (\bmod 5)$ ***A1***

donc $41^{82}$ un reste de $1$ lorsque divisé par $5$ et un reste de $9$ lorsque divisé par $11$ ***R1***

par conséquent, d'après la partie (a), le reste est $31$ ***A1***

***[3 points]***

***Total [10 points]***

**5.** (a) $\frac{1}{2}$ ***A1***

***[1 point]***

(b) Andy pourrait gagner le n[ième] jeu en gagnant le $n-1$[ième] et en gagnant ensuite le n[ième] jeu ou en perdant le $n-1$[ième] et en gagnant ensuite le n[ième] jeu ***(M1)***

$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}(1 - u_{n-1})$ ***A1A1M1***

| **Note :** Attribuez ***A1*** pour chaque terme et ***M1*** pour l'addition des deux probabilités. |
|---|

$u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{1}{4}$ ***AG***

***[4 points]***

(c) la solution générale est $u_n = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + p(n)$ ***(M1)***

pour une solution particulière, pour avoir essayé $p(n) = b$ ***(M1)***

$b = \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}$ ***(A1)***

$b = \frac{1}{3}$

par conséquent, $u_n = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}$ ***(A1)***

en utilisant $u_1 = \frac{1}{2}$ ***M1***

$\frac{1}{2} = A\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

par conséquent, $u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3}$ ***A1***

| **Note :** Acceptez d'autres méthodes valides. |
|---|

***[6 points]***

***Total [11 points]***

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Mathématiques
# Niveau supérieur
# Épreuve 3 – analyse

SPÉCIMEN (adapté de la session de novembre 2014)

1 heure

---

**Instructions destinées aux candidats**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

**1.** [Note maximale : 14]

(a) Utilisez le critère de l'intégrale pour déterminer la convergence ou la divergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,5}} .$$ [3]

(b) Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \times n^{0,5}}$ .

(i) Utilisez le critère de d'Alembert pour montrer que $S$ converge pour $-3 < x < 1$ .

(ii) À partir de là, trouvez l'intervalle de convergence de $S$. [11]

**2.** [Note maximale : 13]

(a) Utilisez un facteur intégrant pour montrer que la solution générale de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{x}{t} = -\frac{2}{t}$, $t > 0$ est $x = 2 + ct$ , où $c$ est une constante. [4]

Le poids d'un chien, en kilogrammes, $t$ semaines après avoir été acheté dans une animalerie, peut être modélisé par la fonction suivante

$$w(t) = \begin{cases} 2 + ct & 0 \le t \le 5 \\ 16 - \dfrac{35}{t} & t > 5 \end{cases} .$$

(b) Étant donné que $w(t)$ est continue, trouvez la valeur de $c$ . [2]

(c) Écrivez une borne supérieure pour le poids du chien. [1]

(d) Prouvez, à partir de la définition formelle de la dérivée, que $w(t)$ est dérivable en $t = 5$ . [6]

**3.** [Note maximale : 10]

Considérez l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ où $f(x, y) = y - 2x$.

(a) Esquissez, sur un même diagramme, les quatre isoclines correspondant à $f(x, y) = k$ où $k$ prend les valeurs $-1$ , $-0{,}5$ , $0$ et $1$. Indiquez clairement le point où chaque isocline coupe l'axe des ordonnées $\mathrm{O}y$. [2]

Une courbe, $C$, passe par le point $(0\,;\,1)$ et satisfait l'équation différentielle ci-dessus.

(b) Esquissez $C$ sur votre diagramme. [3]

(c) Indiquez une relation particulière entre l'isocline $f(x, y) = -\,0{,}5$ et la courbe $C$, à leur point d'intersection. [1]

(d) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de $0{,}1$ pour trouver une valeur approchée de $y$ sur $C$, lorsque $x = 0{,}5$. [4]

**4.** [Note maximale : 13]

Dans cette question, vous pouvez supposer que $\arctan x$ est continue et dérivable pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Considérez la série géométrique infinie

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \qquad |x| < 1 .$$

Montrez que la somme de la série est $\frac{1}{1+x^2}$. [1]

(b) À partir de là, montrez que le développement de $\arctan x$ est

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$ [4]

(c) $f$ est une fonction continue définie sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$.

Utilisez le théorème de la moyenne pour prouver que pour tout $x, y \in [a, b]$, si $y > x$ alors $f(y) > f(x)$. [4]

(d) (i) Sachant que $g(x) = x - \arctan x$, prouvez que $g'(x) > 0$, pour $x > 0$.

(ii) Utilisez le résultat de la partie (c) pour prouver que $\arctan x < x$, pour $x > 0$. [4]

# Barème de notation

## Spécimen
## (adapté de la session de novembre 2014)

## Analyse

## Niveau supérieur

## Épreuve 3

10 pages

## Instructions pour les examinateurs

### Abréviations

***M*** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes du raisonnement doivent être visibles.

***(M)*** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.

***A*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points ***M*** qui précèdent.

***(A)*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.

***R*** Points attribués pour un **raisonnement** clair.

***N*** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes ne sont **pas** visibles.

***AG*** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

### Utilisation du barème

### 1 Généralités

Corrigez selon les instructions de RM™ Assessor et selon le document intitulé « **Mathématiques NS – Directives concernant la notation électronique, mai 2016** ». Il est essentiel de lire ce dernier avant de commencer vos corrections. En particulier, veuillez noter les points suivants.

- Les points doivent être enregistrés à l'aide des annotations spécifiées. Veuillez vérifier de bien saisir les points pour la bonne question.
- Si une partie est **complètement correcte** (et obtient donc tous les points pour le raisonnement devant être visible), utilisez les coches avec des nombres pour attribuer la totalité des points.
- Si une partie est complètement fausse, mettez ***A0*** à côté de la réponse finale.
- Si vous attribuez toute autre chose à une partie, vous **devez** l'enregistrer à l'aide de **toutes** les annotations.
- Tous les points doivent être additionnés et enregistrés par RM™ Assessor.

### 2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- N'attribuez **pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer ***M0*** suivi de ***A1***, puisque le ou les points ***A*** dépendent du ou des points ***M*** précédents, s'il y en a.
- Lorsque des points ***M*** et des points ***A*** sont marqués sur la même ligne, par exemple ***M1A1***, cela signifie habituellement ***M1*** pour avoir **tenté** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple substitution dans une formule) et ***A1*** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise ***(M2)***, ***N3***, etc., ne fractionnez **pas** ces points.

- Lorsque vous voyez une réponse correcte à une question ou à une partie de question, ignorez le travail correct qui suit. Cependant, si le travail qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier point ***A1***. Une exception peut être faite dans le cas de réponses numériques, lorsqu'une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Toutefois, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une autre partie, et si un raisonnement correct ***FT*** est présent, attribuez les points ***FT*** le cas échéant mais n'attribuez pas le dernier point ***A1*** dans cette partie.

  Exemples

| | **Réponse correcte présente** | **Raisonnement qui suit présent** | **Action** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $8\sqrt{2}$ | $5{,}65685\ldots$ *(*valeur décimale incorrecte*)* | Attribuez le dernier point ***A1*** *(ignorez le travail qui suit)* |
| **2.** | $\frac{1}{4}\sin 4x$ | $\sin x$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |
| **3.** | $\log a - \log b$ | $\log(a-b)$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |

## 3 Points *N*

*Attribuez des points **N** pour des réponses **correctes** si le raisonnement n'est **pas** visible.*

- N'attribuez **pas** un mélange de points ***N*** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points ***N*** possibles que le total des points ***M***, ***A*** et ***R*** ; ceci est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas les instructions, à savoir de montrer les étapes de leur travail.

## 4 Points implicites

*Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, **par exemple (M1)**, et ils ne peuvent être attribués que s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.*

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

## 5 Points de suivi

*Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans la ou les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT, il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, obtenue à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points ***FT***, à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points ***A*** **dépendants** ne peut être attribué, mais des points ***M*** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

## 6 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière. Utilisez **MR** pour indiquer qu'il s'agit d'une erreur de lecture. Puis déduisez le premier des points à attribuer, même si c'est un point **M**, mais attribuez tous les autres points de sorte que le candidat ne perd qu'un seul point.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture, accordez alors moins de points, à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.

## 7 Points discrétionnaires *(d)*

*Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Dans de tels cas, il convient d'utiliser l'annotation **(d)** et de rédiger un bref commentaire à côté du point afin d'expliquer sa décision.*

## 8 Autres méthodes

*Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.*

- Des autres méthodes possibles pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des autres solutions possibles pour une partie de question sont indiquées par **SOIT … SOIT**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi une mise en page particulière (avec des alignements) pour aider les examinateurs à reconnaître où ces autres solutions commencent et finissent.

## 9 Autres formes

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes possibles de **notation**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses, immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

**Exemple** : pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x-3)$, le barème de notation propose:

$$f'(x) = \left(2\cos(5x-3)\right)5 \quad \left(=10\cos(5x-3)\right)$$ ***A1***

Attribuez ***A1*** pour $\left(2\cos(5x-3)\right)5$, même si $10\cos(5x-3)$ n'est pas visible.

## 10 Précision des réponses

*Les candidats **NE** doivent **PLUS** être pénalisés pour une erreur de précision (**AP**).*

*Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera prévu pour avoir donné la réponse à la précision demandée. Lorsque le niveau de précision n'est pas spécifié dans la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près. Veuillez soigneusement vérifier le travail des candidats pour les points **FT**.*

## 11 Travail barré

*Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou s'il a barré son travail d'une autre façon, n'attribuez pas aucun point pour ce travail.*

## 12 Calculatrice

*Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (par exemple, la TI-89) ne sont pas autorisées.*

**Notation de type calculatrice**
On peut lire dans le *Guide de mathématiques NS* :

*Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.*

N'acceptez **pas** des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

## 13 Plusieurs solutions

*Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examinateur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.*

**1.** (a) $\int_1^{\infty} x^{-0,5}\,dx$ ***M1***

$= \lim_{H \to \infty} \left[2x^{0,5}\right]_1^H$ ***A1***

| **Note :** Acceptez $\left[2x^{0,5}\right]_1^{\infty}$. |
|---|

ceci n'est pas fini, donc la série diverge ***R1***

| **Notes :** Acceptez des équivalents, par exemple, $\to \infty$ ou « la limite n'existe pas ». Si la limite inférieure n'égale pas 1, attribuez ***M0A0***, mais le ***R1*** peut néanmoins être attribué si le raisonnement final est correct. |
|---|

***[3 points]***

(b) (i) en appliquant le critère de d'Alembert ***M1***

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^{0,5}} \times \frac{2^n n^{0,5}}{(x+1)^n} \right|$ ***A1***

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x+1)n^{0,5}}{2(n+1)^{0,5}} \right| = \left| \frac{(x+1)}{2} \right|$ ***A1***

| **Note :** Ne pénalisez pas l'absence de limites et de valeurs absolues. |
|---|

converge si $\left| \frac{x+1}{2} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{(x+1)}{2} < 1$ ***M1***

$\Rightarrow -3 < x < 1$ ***A1***

| **Note :** Acceptez $-2 < x+1 < 2$. |
|---|

(ii) en considérant les bornes ***M1***

lorsque $x = -3$, la série est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{0,5}}$ ***A1***

$\frac{1}{n^{0,5}}$ est une suite décroissante dont la limite est zéro, ***R1***

donc la série converge par le critère des séries alternées ***R1***

lorsque $x = 1$, la série est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,5}}$ qui diverge par la partie (a) ou par le fait que c'est une série de Riemann (ou series *p*) ***A1***

| **Note :** Ce ***A1*** est attribué pour le raisonnement et l'énoncé comme quoi la série diverge. |
|---|

l'intervalle de convergence est $-3 \le x < 1$ ***A1***

***[11 points]***

***Total [14 points]***

**2.** (a) facteur intégrant $e^{\int -\frac{1}{t}\mathrm{d}t} = e^{-\ln t}\left(= \frac{1}{t}\right)$ ***M1A1***

$\frac{x}{t} = \int -\frac{2}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{t} + c$ ***A1A1***

| |
|---|
| **Note :** Attribuez ***A1*** pour $\frac{x}{t}$ et ***A1*** pour $\frac{2}{t} + c$. |

$x = 2 + ct$ ***AG***

***[4 points]***

(b) étant donné la continuité en $x = 5$

$5c + 2 = 16 - \frac{35}{5} \Rightarrow c = \frac{7}{5}$ ***M1A1***

***[2 points]***

(c) toute valeur $\geq 16$ ***A1***

| |
|---|
| **Note :** Acceptez des valeurs inférieures à $16$ si elles sont pleinement justifiées par une référence à l'âge maximale d'un chien. |

***[1 point]***

(d) $\lim_{h\to 0-}\left(\frac{\frac{7}{5}(5+h)+2-\frac{7}{5}(5)-2}{h}\right) = \frac{7}{5}$ ***M1A1***

$\lim_{h\to 0+}\left(\frac{16-\frac{35}{5+h}-16+\frac{35}{5}}{h}\right)\left(= \lim_{h\to 0+}\left(\frac{\frac{-35}{5+h}+7}{h}\right)\right)$ ***M1***

$= \lim_{h\to 0+}\left(\frac{\frac{-35+35+7h}{(5+h)}}{h}\right) = \lim_{h\to 0+}\left(\frac{7}{5+h}\right) = \frac{7}{5}$ ***M1A1***

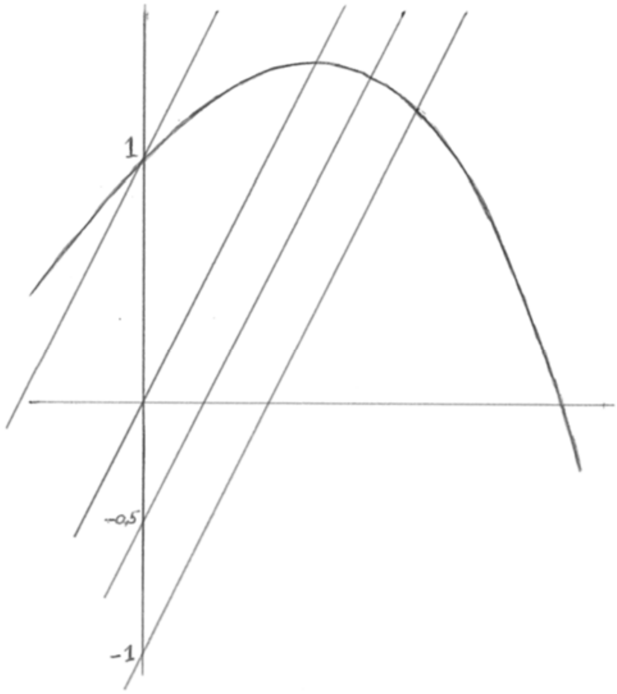
les deux limites sont égales, donc la fonction est dérivable en $t = 5$ ***R1AG***

| |
|---|
| **Notes :** Les limites $t \to 5$ pouvaient également être utilisées.<br>Pour chaque valeur de $\frac{7}{5}$ obtenue par dérivation habituelle, attribuez ***A1***.<br>Pour mériter les 4 autres points une explication rigoureuse doit être donnée sur la façon d'obtenir la dérivée à partir des dérivées à gauche et à droite. |

| |
|---|
| **Notes :** Si le candidat travaille avec *t* et remplace ensuite par $t = 5$ à la fin, corrigez de la façon suivante.<br>Le premier ***M1*** pour l'utilisation de la formule avec *t* dans le cas linéaire, ***A1*** pour $\frac{7}{5}$.<br>Attribuez les 2 points suivants pour la méthode, même si *t* n'est pas remplacée par $5$, ***A1*** pour $\frac{7}{5}$. |

***[6 points]***
***Total [13 points]***

**3.** (a) et (b)




(a) ***A1*** pour 4 droites parallèles de pente positive ***A1***
***A1*** pour des ordonnées à l'origine correctes ***A1***

***[2 points]***

(b) ***A1*** pour passer par $(0;1)$ avec une pente positive inférieure à $2$
***A1*** pour un point stationnaire sur $y = 2x$
***A1*** pour une pente négative sur les 2 autres isoclines ***A1A1A1***

***[3 points]***

(c) l'isocline est perpendiculaire à $C$ ***R1***

***[1 point]***

(d) $y_{n+1} = y_n + 0{,}1(y_n - 2x_n)(= 1{,}1y_n - 0{,}2x_n)$ ***(M1)(A1)***

| **Note :** Attribuez également ***M1A1*** si la formule n'est pas écrite, mais que $y_2$ est correct. |
|---|

$y_0 = 1$ ; $y_1 = 1{,}1$ ; $y_2 = 1{,}19$ ; $y_3 = 1{,}269$ ; $y_4 = 1{,}3359$ ***(M1)***
$y_5 = 1{,}39$ avec 3 chiffres significatifs ***A1***

| **Note :** ***M1*** est pour l'utilisation répétée de leur formule, avec des pas de $0{,}1$. |
|---|

| **Note :** Acceptez $1{,}39$ ou $1{,}4$ seulement. |
|---|

***[4 points]***

***Total [10 points]***

**4.** (a) $r = -x^2$, $S = \dfrac{1}{1+x^2}$ ***A1AG***

***[1 point]***

(b) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$

**SOIT**

$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\,\mathrm{d}x$ ***M1***

$\arctan x = c + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$ ***A1***

**Note :** Ne pénalisez pas l'absence de $c$ à cette étape.

lorsque $x = 0$, nous avons $\arctan 0 = c$, par conséquent $c = 0$ ***M1A1***

**SOIT**

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots\,\mathrm{d}t$ ***M1A1A1***

**Notes :** Tolérez $x$ comme variable ou comme limite. ***M1*** pour savoir intégrer, ***A1*** pour chacune des limites.

$\left[\arctan t\right]_0^x = \left[t - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{t^7}{7} + \ldots\right]_0^x$ ***A1***

par conséquent, $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$ ***AG***

***[4 points]***

(c) en appliquant le théorème de la moyenne à la fonction $f$ sur l'intervalle $[x,\ y]$ ***M1***

$\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$ (pour un $c \in \left]\,x,\ y\,\right[$) ***A1***

$\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$ (puisque $f'(c) > 0$) ***R1***

$f(y) - f(x) > 0$ puisque $y > x$ ***R1***

$\Rightarrow f(y) > f(x)$ ***AG***

***[4 points]***

**Note :** S'ils utilisent $x$ plutôt que $c$, ils doivent obtenir ***M1A0R0***, mais ils peuvent obtenir le prochain ***R1***.

*suite de la question à la page suivante*

*suite de la question 4*

(d) (i) $g(x) = x - \arctan x \Rightarrow g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x^2}$ ***A1***

ceci est supérieur à zéro, car $\dfrac{1}{1+x^2} < 1$ ***R1***

donc $g'(x) > 0$ ***AG***

(ii) ($g$ est une fonction continue définie sur $[0, b]$ et dérivable sur $]0, b[$ avec $g'(x) > 0$ sur $]0, b[$ pour tout $b \in \mathbb{R}$ )

(si $x \in [0, b]$ alors) à partir de la partie (c), $g(x) > g(0)$ ***M1***

$x - \arctan x > 0 \Rightarrow \arctan x < x$ ***M1***

(puisque $b$ peut prendre n'importe quelle valeur positive,
c'est vrai pour tout $x > 0$) ***AG***

***[4 points]***

***Total [13 points]***

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Mathématiques
# Niveau supérieur
# Épreuve 3 – ensembles, relations et groupes

SPÉCIMEN (adapté de la session de novembre 2014)

1 heure

---

**Instructions destinées aux candidats**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

**1.** [Note maximale : 12]

Un groupe, muni de l'opération binaire de multiplication modulo 15, est présenté dans la table de Cayley suivante.

| $\times_{15}$ | **1** | **2** | **4** | **7** | **8** | **11** | **13** | **14** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 | 11 | 13 | 14 |
| **2** | 2 | 4 | 8 | 14 | 1 | 7 | 11 | 13 |
| **4** | 4 | 8 | 1 | 13 | 2 | 14 | 7 | 11 |
| **7** | 7 | 14 | 13 | 4 | 11 | 2 | 1 | 8 |
| **8** | 8 | 1 | 2 | 11 | 4 | 13 | 14 | 7 |
| **11** | 11 | 7 | 14 | 2 | 13 | $a$ | $b$ | $c$ |
| **13** | 13 | 11 | 7 | 1 | 14 | $d$ | $e$ | $f$ |
| **14** | 14 | 13 | 11 | 8 | 7 | $g$ | $h$ | $i$ |

(a) Trouvez les valeurs représentées par chacune des lettres dans la table. [3]

(b) Trouvez l'ordre de chacun des éléments du groupe. [3]

(c) Écrivez les trois ensembles qui constituent des sous-groupes d'ordre 2. [2]

(d) Trouvez les trois ensembles qui constituent des sous-groupes d'ordre 4. [4]

**2.** [Note maximale : 8]

Définissez $f:\mathbb{R} \setminus \{0,5\} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x-1}$.

(a) Prouvez que $f$ est une injection. [4]

(b) Prouvez que $f$ n'est pas une surjection. [4]

**3.** [Note maximale : 9]

Considérez l'ensemble $A$ comprenant toutes les permutations des entiers $1\,;2\,;3\,;4\,;5$.

(a) Deux membres de $A$ sont donnés par $p = (1\ 2\ 5)$ et $q = (1\ 3)(2\ 5)$.
Trouvez la permutation particulière qui est équivalente à $q \circ p$. [3]

(b) Indiquez une permutation d'ordre $6$ appartenant à $A$. [2]

(c) Soit $P =$ {toutes les permutations dans $A$ où exactement deux entiers changent de position} et $Q =$ {toutes les permutations dans $A$ où l'entier $1$ change de position}.

(i) Énumérez tous les éléments dans $P \cap Q$.

(ii) Trouvez $n(P \cap Q')$. [4]

**4.** [Note maximale : 10]

Le groupe $\{G, *\}$ possède $e_G$ comme élément neutre et le groupe $\{H, \circ\}$ possède $e_H$ comme élément neutre. Un homomorphisme $f$ est tel que $f: G \to H$. Il est donné que $f(e_G) = e_H$.

(a) Prouvez que pour tout $a \in G, f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. [4]

Soit $\{H, \circ\}$ le groupe cyclique d'ordre sept, et soit $p$ un générateur.
Soit $x \in G$ tel que $f(x) = p^2$.

(b) Trouvez $f(x^{-1})$. [2]

(c) Étant donné que $f(x * y) = p$, trouvez $f(y)$. [4]

**5.** [Note maximale : 11]

$\{G, *\}$ est un groupe dont l'élément neutre est $e$. Soit $a, b \in G$.

(a) Vérifiez que le symétrique de $a * b^{-1}$ est égal à $b * a^{-1}$. [3]

Soit $\{H, *\}$ un sous-groupe de $\{G, *\}$. Soit $R$ une relation définie sur $G$ par

$$aRb \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H.$$

(b) Prouvez que $R$ est une relation d'équivalence, en indiquant clairement chaque fois que vous utilisez une des quatre propriétés requises d'un groupe. [8]

# Barème de notation

## Spécimen
## (adapté de la session de novembre 2014)

## Ensembles, relations et groupes

## Niveau supérieur

## Épreuve 3

9 pages

## Instructions pour les examinateurs

### Abréviations

***M*** Points attribués pour avoir tenté d’utiliser une **méthode** correcte ; les étapes du raisonnement doivent être visibles.

***(M)*** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d’un travail **correct**.

***A*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points ***M*** qui précèdent.

***(A)*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d’un travail **correct**.

***R*** Points attribués pour un **raisonnement** clair.

***N*** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes ne sont **pas** visibles.

***AG*** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n’est attribué.

### Utilisation du barème

### 1 Généralités

Corrigez selon les instructions de RM™ Assessor et selon le document intitulé « **Mathématiques NS – Directives concernant la notation électronique, mai 2016** ». Il est essentiel de lire ce dernier avant de commencer vos corrections. En particulier, veuillez noter les points suivants.

- Les points doivent être enregistrés à l’aide des annotations spécifiées. Veuillez vérifier de bien saisir les points pour la bonne question.
- Si une partie est **complètement correcte** (et obtient donc tous les points pour le raisonnement devant être visible), utilisez les coches avec des nombres pour attribuer la totalité des points.
- Si une partie est complètement fausse, mettez ***A0*** à côté de la réponse finale.
- Si vous attribuez toute autre chose à une partie, vous **devez** l’enregistrer à l’aide de **toutes** les annotations.
- Tous les points doivent être additionnés et enregistrés par RM™ Assessor.

### 2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- N’attribuez **pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n’est pas possible d’attribuer ***M0*** suivi de ***A1***, puisque le ou les points ***A*** dépendent du ou des points ***M*** précédents, s’il y en a.
- Lorsque des points ***M*** et des points ***A*** sont marqués sur la même ligne, par exemple ***M1A1***, cela signifie habituellement ***M1*** pour avoir **tenté** d’utiliser une méthode appropriée (par exemple substitution dans une formule) et ***A1*** pour l’utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise ***(M2)***, ***N3***, etc., ne fractionnez **pas** ces points.

- Lorsque vous voyez une réponse correcte à une question ou à une partie de question, ignorez le travail correct qui suit. Cependant, si le travail qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier point ***A1***. Une exception peut être faite dans le cas de réponses numériques, lorsqu'une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Toutefois, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une autre partie, et si un raisonnement correct ***FT*** est présent, attribuez les points ***FT*** le cas échéant mais n'attribuez pas le dernier point ***A1*** dans cette partie.

  Exemples

| | **Réponse correcte présente** | **Raisonnement qui suit présent** | **Action** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $8\sqrt{2}$ | 5,65685… *(*valeur décimale incorrecte*)* | Attribuez le dernier point ***A1*** *(ignorez le travail qui suit)* |
| **2.** | $\frac{1}{4}\sin 4x$ | $\sin x$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |
| **3.** | $\log a - \log b$ | $\log(a-b)$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |

## 3 Points *N*

*Attribuez des points **N** pour des réponses **correctes** si le raisonnement n'est **pas** visible.*

- N'attribuez **pas** un mélange de points ***N*** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points ***N*** possibles que le total des points ***M***, ***A*** et ***R*** ; ceci est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas les instructions, à savoir de montrer les étapes de leur travail.

## 4 Points implicites

*Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, **par exemple (M1)**, et ils ne peuvent être attribués que s'ils sont suivis d'un travail **correct** visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.*

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

## 5 Points de suivi

*Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans la ou les parties **suivantes**. Pour accorder des points **FT, il faut que les étapes du travail soient présentées** et pas seulement la réponse finale, obtenue à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points ***FT***, à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1,5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points ***A*** **dépendants** ne peut être attribué, mais des points ***M*** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

**6 Erreurs de lecture**

*Si un candidat copie incorrectement les informations d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière. Utilisez **MR** pour indiquer qu'il s'agit d'une erreur de lecture. Puis déduisez le premier des points à attribuer, même si c'est un point **M**, mais attribuez tous les autres points de sorte que le candidat ne perd qu'un seul point.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture, accordez alors moins de points, à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1{,}5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.

**7 Points discrétionnaires *(d)***

*Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Dans de tels cas, il convient d'utiliser l'annotation **(d)** et de rédiger un bref commentaire à côté du point afin d'expliquer sa décision.*

**8 Autres méthodes**

*Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.*

- Des autres méthodes possibles pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des autres solutions possibles pour une partie de question sont indiquées par **SOIT … SOIT**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi une mise en page particulière (avec des alignements) pour aider les examinateurs à reconnaître où ces autres solutions commencent et finissent.

**9 Autres formes**

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes possibles de **notation**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses, immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

**Exemple** : pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x-3)$, le barème de notation propose:

$f'(x) = \left(2\cos(5x-3)\right)5 \quad \left(= 10\cos(5x-3)\right)$ ***A1***

Attribuez ***A1*** pour $\left(2\cos(5x-3)\right)5$, même si $10\cos(5x-3)$ n'est pas visible.

## 10 Précision des réponses

*Les candidats* ***NE*** *doivent* ***PLUS*** *être pénalisés pour une erreur de précision (****AP****).*

*Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera prévu pour avoir donné la réponse à la précision demandée. Lorsque le niveau de précision n'est pas spécifié dans la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près. Veuillez soigneusement vérifier le travail des candidats pour les points* ***FT****.*

## 11 Travail barré

*Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou s'il a barré son travail d'une autre façon, n'attribuez pas aucun point pour ce travail.*

## 12 Calculatrice

*Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (par exemple, la TI-89) ne sont pas autorisées.*

**Notation de type calculatrice**
On peut lire dans le *Guide de mathématiques NS* :

*Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.*

N'acceptez **pas** des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

## 13 Plusieurs solutions

*Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examinateur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.*

**1.** (a) $a = 1$, $b = 8$, $c = 4$,
$d = 8$, $e = 4$, $f = 2$,
$g = 4$, $h = 2$, $i = 1$ ***A3***

**Note :** Attribuez ***A3*** pour 9 réponses correctes, ***A2*** pour 6 ou plus, et ***A1*** pour 3 ou plus.

***[3 points]***

(b)

| **Éléments** | **Ordre** |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 4 ; 11 ; 14 | 2 |
| 2 ; 7 ; 8 ; 13 | 4 |

***A3***

**Note :** Attribuez ***A3*** pour 8 réponses correctes, ***A2*** pour 6 ou plus, et ***A1*** pour 4 ou plus.

***[3 points]***

(c) $\{1\ ;\ 4\}$, $\{1\ ;\ 11\}$, $\{1\ ;\ 14\}$ ***A1A1***

**Note :** Attribuez ***A1*** pour une réponse correcte et ***A2*** pour toutes les 3 (et pas d'autres).

***[2 points]***

(d) $\{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\}$, $\{1\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 13\}$, ***A1A1***
$\{1\ ;\ 4\ ;\ 11\ ;\ 14\}$ ***A2***

***[4 points]***

***Total [12 points]***

**2.** (a) **MÉTHODE 1**

$f(x)=f(y)\Rightarrow \dfrac{4x+1}{2x-1}=\dfrac{4y+1}{2y-1}$ ***M1A1***

pour avoir tenté d'effectuer le produit croisé et de simplifier ***M1***

$(4x+1)(2y-1)=(2x-1)(4y+1)$

$\Rightarrow 8xy+2y-4x-1=8xy+2x-4y-1\Rightarrow 6y=6x$

$\Rightarrow x=y$ ***A1***

donc, c'est une injection ***AG***

***[4 points]***

**MÉTHODE 2**

$f'(x)=\dfrac{4(2x-1)-2(4x+1)}{(2x-1)^2}=\dfrac{-6}{(2x-1)^2}$ ***M1A1***

$<0$ (pour tout $x\neq 0,5$) ***R1***

la fonction est donc décroissante de chaque côté de la discontinuité et

$f(x)<2$ pour $x<0,5$ et $x>2$ pour $f(x)>0,5$ ***R1***

donc, c'est une injection ***AG***

| | |
|---|---|
| **Note :** | S'il y a une représentation graphique correcte de la fonction et si le candidat indique qu'elle est décroissante dans chaque partie (ou s'il applique le test de la droite horizontale) et qu'il s'agit donc d'une injection, attribuez ***M1A1R1***. |

***[4 points]***

(b) **MÉTHODE 1**

pour avoir tenté de résoudre $y=\dfrac{4x+1}{2x-1}$ ***M1***

$y(2x-1)=4x+1\Rightarrow 2xy-y=4x+1$ ***A1***

$2xy-4x=1+y\Rightarrow x=\dfrac{1+y}{2y-4}$ ***A1***

aucune valeur pour $y=2$ ***R1***

donc, ce n'est pas une surjection ***AG***

***[4 points]***

**MÉTHODE 2**

pour avoir considéré $y=2$ ***A1***

pour avoir tenté de résoudre $2=\dfrac{4x+1}{2x-1}$ ***M1***

$4x-2=4x+1$ ***A1***

qui ne possède pas de solution ***R1***

donc, ce n'est pas une surjection ***AG***

| | |
|---|---|
| **Note :** | S'il y a une représentation graphique correcte de la fonction et si le candidat indique que, puisqu'il y a une asymptote horizontale en $y=2$, alors la fonction n'est pas une surjection, attribuez ***M1R1***. |

***[4 points]***

***Total [8 points]***

**3.** (a) $q \circ p = (1\ 3)\ (2\ 5)\ (1\ 2\ 5)$ ***(M1)***

$= (1\ 5\ 3)$ ***M1A1***

| |
|---|
| **Note :** ***M1*** pour une réponse avec des cycles disjoints, ***A1*** pour (1 5 3). |

| |
|---|
| **Note :** Tolérez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, tolérez (1 5 3)(2). Si cela a été fait dans le mauvais ordre et si la réponse obtenue a été (1 3 2), attribuez ***A2***. |

***[3 points]***

(b) toute permutation avec 2 cycles disjoints, l'un de longueur 2 et l'autre de longueur 3, par exemple, (1 2) (3 4 5) ***M1A1***

| |
|---|
| **Notes :** Attribuez ***M1A0*** pour toute permutation avec 2 cycles non disjoints, l'un de longueur 2 et l'autre de longueur 3. Acceptez une notation non cyclique. |

***[2 points]***

(c) (i) $(1\ ;\ 2), (1\ ;\ 3), (1\ ;\ 4), (1\ ;\ 5)$ ***M1A1***

(ii) $(2\ 3), (2\ 4), (2\ 5), (3\ 4), (3\ 5), (4\ 5)$ ***(M1)***

$6$ ***A1***

| |
|---|
| **Note :** Attribuez ***M1*** pour au moins un cycle correct. |

***[4 points]***

***Total [9 points]***

**4.** (a) $f(e_G) = e_H \Rightarrow f\left(a * a^{-1}\right) = e_H$ ***M1***

$f$ est un homomorphisme, donc $f\left(a * a^{-1}\right) = f(a) \circ f\left(a^{-1}\right) = e_H$ ***M1A1***

par définition $f(a) \circ \left(f(a)\right)^{-1} = e_H$ donc $f\left(a^{-1}\right) = \left(f(a)\right)^{-1}$

(par la loi de simplification à gauche) ***R1***

***[4 points]***

(b) à partir de (a) $f\left(x^{-1}\right) = \left(f(x)\right)^{-1}$

donc $f\left(x^{-1}\right) = \left(p^2\right)^{-1} = p^5$ ***M1A1***

***[2 points]***

(c) $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ (homomorphisme) ***(M1)***

$p^2 \circ f(y) = p$ ***A1***

$f(y) = p^5 \circ p$ ***(M1)***

$= p^6$ ***A1***

***[4 points]***

***Total [10 points]***

**5.** (a) **MÉTHODE 1**

$\left(a*b^{-1}\right)*\left(b*a^{-1}\right)=a*b^{-1}*b*a^{-1}=a*e*a^{-1}=a*a^{-1}=e$ ***M1A1A1***

**Notes :** ***M1*** pour la multiplication, ***A1*** pour au moins une des 3 expressions suivantes, ***A1*** pour *e.*
Tolérez $\left(b*a^{-1}\right)*\left(a*b^{-1}\right)=b*a^{-1}*a*b^{-1}=b*e*b^{-1}=b*b^{-1}=e$ .

**MÉTHODE 2**

$\left(a*b^{-1}\right)^{-1}=\left(b^{-1}\right)^{-1}*a^{-1}$ ***M1A1***

$=b*a^{-1}$ ***A1***

***[3 points]***

(b) $a*a^{-1}=e\in H$ (puisque $H$ est un sous-groupe) ***M1***
donc $aRa$ et par conséquent $R$ est réflexive

$aRb \Leftrightarrow a*b^{-1}\in H$ . $H$ est un sous-groupe, donc tout élément possède un symétrique dans $H$ donc $\left(a*b^{-1}\right)\in H$ ***R1***

$\Leftrightarrow b*a^{-1}\in H \Leftrightarrow bRa$ ***M1***
donc $R$ est symétrique

$aRb,\ bRc \Leftrightarrow a*b^{-1}\in H,\ b*c^{-1}\in H$ ***M1***

puisque $H$ est fermé $\left(a*b^{-1}\right)*\left(b*c^{-1}\right)\in H$ ***R1***

et en utilisant l'associativité ***R1***

$\left(a*b^{-1}\right)*\left(b*c^{-1}\right)=a*\left(b^{-1}*b\right)*c^{-1}=a*c^{-1}\in H \Leftrightarrow aRc$ ***A1***

par conséquent $R$ est transitive
$R$ est réflexive, symétrique et transitive ***A1***

**Note :** Peut être dit séparément à la fin de chaque partie.

il s'agit donc d'une relation d'équivalence ***AG***

***[8 points]***

***Total [11 points]***

**Mathématiques**
**Niveau supérieur**
**Épreuve 3 – statistiques et probabilités**

SPÉCIMEN (adapté de la session de novembre 2014)

1 heure

---

**Instructions destinées aux candidats**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n’a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l’aide d’une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d’un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

**1.** [Note maximale : 7]

Une variable aléatoire $X$ a pour fonction de densité

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{4} & 1\le x<3 \\ 0 & x\ge 3 \end{cases}.$$

(a) Esquissez la représentation graphique de $y=f(x)$. [1]

(b) Trouvez la fonction de répartition de $X$. [5]

(c) Trouvez le troisième quartile de $X$. [1]

**2.** [Note maximale : 9]

Lors d’une fête foraine, Eric joue à un jeu dans lequel il lance des fléchettes (ou dards) sur une cible. Chaque fois qu’il lance une fléchette, la probabilité qu’il atteigne la cible est de $0{,}2$. Il peut lancer autant de fléchettes qu’il désire, mais cela lui coûte $1\ \$$ pour chaque lancer. S’il atteint la cible trois fois au total, il gagne $10\ \$$.

(a) Trouvez la probabilité qu’il atteigne la cible pour la troisième fois lors de son sixième lancer. [3]

(b) (i) Trouvez le nombre espéré de lancers nécessaires pour qu’Eric atteigne la cible trois fois.

(ii) Écrivez la perte ou le profit espéré s’il joue jusqu’à ce qu’il gagne les $10\ \$$. [3]

(c) S’il n’a que $8\ \$$, trouvez la probabilité qu’il perde tout son argent avant qu’il atteigne la cible trois fois. [3]

**3.** [Note maximale : 11]

(a) Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires telles que $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ et $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$ alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big)$.

Prouvez que si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. [3]

(b) Dans une certaine entreprise, on prétend que la distance parcourue par les employés pour se rendre au travail est indépendante de leur salaire. Pour tester cela, on a demandé à 20 employés choisis au hasard, d'indiquer la distance qu'ils parcourent pour se rendre au travail, ainsi que leur salaire. On a trouvé que la valeur du coefficient de corrélation, $r$, correspondant à cet échantillon est de $-0{,}35$.

Vous pouvez supposer que le salaire et la distance parcourue pour se rendre au travail suivent des distributions normales.

Effectuez un test unilatéral, au niveau de signification de $5\%$ pour tester si la distance parcourue pour se rendre au travail et le salaire des employés sont indépendants ou non. [8]

**4.** [Note maximale : 13]

Si $X$ est une variable aléatoire qui suit une distribution de Poisson de moyenne $\lambda > 0$ alors la fonction génératrice de $X$ est $G(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

(a) (i) Prouvez que $\mathrm{E}(X) = \lambda$.

(ii) Prouvez que $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. [6]

$Y$ est une variable aléatoire, indépendante de $X$, qui suit également une distribution de Poisson de moyenne $\lambda$.

(b) Si $S = 2X - Y$ trouvez

(i) $\mathrm{E}(S)$ ;

(ii) $\mathrm{Var}(S)$. [3]

Soit $T = \dfrac{X}{2} + \dfrac{Y}{2}$.

(c) (i) Montrez que $T$ est un estimateur sans biais de $\lambda$.

(ii) Montrez que $T$ est un meilleur estimateur sans biais de $\lambda$ que $S$. [3]

(d) Est-ce que $S$ ou $T$ pourraient modéliser une distribution de Poisson ? Justifiez votre réponse. [1]

**5.** [Note maximale : 10]

Deux espèces de plantes, A et B, sont en apparence identiques, mais on sait que la longueur moyenne des feuilles d'une plante de l'espèce A est de $5{,}2\,\text{cm}$, alors que la longueur moyenne des feuilles d'une plante de l'espèce B est de $4{,}6\,\text{cm}$. Les deux longueurs peuvent être modélisées par des distributions normales dont l'écart-type est de $1{,}2\,\text{cm}$.

Dans le but de tester si une plante donnée appartient à l'espèce A ou à l'espèce B, $16$ feuilles sont choisies au hasard dans une plante. La longueur, $x$, de chaque feuille est mesurée et la longueur moyenne est évaluée. Un test unilatéral pour la moyenne de l'échantillon, $\bar{X}$, est ensuite effectué au niveau de signification de $5\,\%$ avec les hypothèses : $H_0 : \mu = 5{,}2$ et $H_1 : \mu < 5{,}2$.

(a) Trouvez la région critique de ce test. [3]

(b) Trouvez la probabilité d'une erreur de type II si les feuilles proviennent en fait d'une plante de l'espèce B. [2]

On sait maintenant que dans la région où la plante a été trouvée, $90\,\%$ de toutes les plantes sont de l'espèce A et $10\,\%$ sont de l'espèce B.

(c) Trouvez la probabilité que $\bar{X}$ se trouve à l'intérieur de la région critique du test. [2]

(d) Si, après avoir effectué le test, la moyenne de l'échantillon se trouvait à l'intérieur de la région critique, trouvez la probabilité que les feuilles provenaient d'une plante de l'espèce A. [3]

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Barème de notation

## Spécimen
## (adapté de la session de novembre 2014)

## Statistiques et probabilités

## Niveau supérieur

## Épreuve 3

10 pages

## Instructions pour les examinateurs

### Abréviations

***M*** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte ; les étapes du raisonnement doivent être visibles.

***(M)*** Points attribués pour la **méthode** ; elle peut être implicite si elle est suivie d'un travail **correct**.

***A*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points ***M*** qui précèdent.

***(A)*** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; elles peuvent être implicites si elles sont suivies d'un travail **correct**.

***R*** Points attribués pour un **raisonnement** clair.

***N*** Points attribués pour des réponses **correctes** si les étapes ne sont **pas** visibles.

***AG*** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

### Utilisation du barème

### 1 Généralités

Corrigez selon les instructions de RM™ Assessor et selon le document intitulé « **Mathématiques NS – Directives concernant la notation électronique, mai 2016** ». Il est essentiel de lire ce dernier avant de commencer vos corrections. En particulier, veuillez noter les points suivants.

- Les points doivent être enregistrés à l'aide des annotations spécifiées. Veuillez vérifier de bien saisir les points pour la bonne question.
- Si une partie est **complètement correcte** (et obtient donc tous les points pour le raisonnement devant être visible), utilisez les coches avec des nombres pour attribuer la totalité des points.
- Si une partie est complètement fausse, mettez ***A0*** à côté de la réponse finale.
- Si vous attribuez toute autre chose à une partie, vous **devez** l'enregistrer à l'aide de **toutes** les annotations.
- Tous les points doivent être additionnés et enregistrés par RM™ Assessor.

### 2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- N'attribuez **pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- Il n'est pas possible d'attribuer ***M0*** suivi de ***A1***, puisque le ou les points ***A*** dépendent du ou des points ***M*** précédents, s'il y en a.
- Lorsque des points ***M*** et des points ***A*** sont marqués sur la même ligne, par exemple ***M1A1***, cela signifie habituellement ***M1*** pour avoir **tenté** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple substitution dans une formule) et ***A1*** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Lorsque le barème de notation précise ***(M2)***, ***N3***, etc., ne fractionnez **pas** ces points.

- Lorsque vous voyez une réponse correcte à une question ou à une partie de question, ignorez le travail correct qui suit. Cependant, si le travail qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier point ***A1***. Une exception peut être faite dans le cas de réponses numériques, lorsqu'une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Toutefois, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une autre partie, et si un raisonnement correct ***FT*** est présent, attribuez les points ***FT*** le cas échéant mais n'attribuez pas le dernier point ***A1*** dans cette partie.

  Exemples

| | **Réponse correcte présente** | **Raisonnement qui suit présent** | **Action** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $8\sqrt{2}$ | 5,65685… (valeur décimale incorrecte) | Attribuez le dernier point ***A1*** *(ignorez le travail qui suit)* |
| **2.** | $\frac{1}{4}\sin 4x$ | $\sin x$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |
| **3.** | $\log a - \log b$ | $\log(a-b)$ | N'attribuez pas le dernier point ***A1*** |

## 3 Points *N*

*Attribuez des points* ***N*** *pour des réponses* **correctes** *si le raisonnement n'est* **pas** *visible.*

- N'attribuez **pas** un mélange de points ***N*** et d'autres points.
- Il peut y avoir moins de points ***N*** possibles que le total des points ***M***, ***A*** et ***R*** ; ceci est volontaire puisque cela pénalise les candidats qui ne suivent pas les instructions, à savoir de montrer les étapes de leur travail.

## 4 Points implicites

*Les points implicites apparaissent entre* ***parenthèses***, ***par exemple (M1)****, et ils ne peuvent être attribués que s'ils sont suivis d'un travail* **correct** *visible ou s'ils sont impliqués par le travail qui suit.*

- Normalement le travail correct est visible dans la ligne suivante ou impliqué par la ligne suivante.
- Des points **sans** les parenthèses peuvent être attribués seulement pour du travail **visible**.

## 5 Points de suivi

*Les points de suivi (****FT****) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une* **partie** *d'une question est correctement utilisée dans la ou les parties* **suivantes**. *Pour accorder des points* ***FT, il faut que les étapes du travail soient présentées*** *et pas seulement la réponse finale, obtenue à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points ***FT***, à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1,5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.
- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une erreur est commise, aucun des points ***A*** **dépendants** ne peut être attribué, mais des points ***M*** peuvent être accordés, le cas échéant.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.

## 6 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Un candidat ne doit être pénalisé qu'une seule fois pour une erreur de lecture particulière. Utilisez **MR** pour indiquer qu'il s'agit d'une erreur de lecture. Puis déduisez le premier des points à attribuer, même si c'est un point **M**, mais attribuez tous les autres points de sorte que le candidat ne perd qu'un seul point.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture, accordez alors moins de points, à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture conduit à une valeur inappropriée (par exemple $\sin\theta = 1,5$), n'attribuez pas le ou les points pour la ou les réponses finales.

## 7 Points discrétionnaires *(d)*

*Un examinateur attribue un point à sa discrétion dans les rares occasions où le barème de notation ne prévoit pas le travail présenté. Dans de tels cas, il convient d'utiliser l'annotation **(d)** et de rédiger un bref commentaire à côté du point afin d'expliquer sa décision.*

## 8 Autres méthodes

*Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation. En cas de doute, demandez l'avis de votre chef d'équipe.*

- Des autres méthodes possibles pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des autres solutions possibles pour une partie de question sont indiquées par **SOIT … SOIT**.
- Lorsque cela est possible, on utilisera aussi une mise en page particulière (avec des alignements) pour aider les examinateurs à reconnaître où ces autres solutions commencent et finissent.

## 9 Autres formes

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes possibles de **notation**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses, immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens) apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

**Exemple** : pour la dérivation de $f(x) = 2\sin(5x-3)$, le barème de notation propose:

$f'(x) = \left(2\cos(5x-3)\right)5 \quad \left(= 10\cos(5x-3)\right)$ ***A1***

Attribuez ***A1*** pour $\left(2\cos(5x-3)\right)5$, même si $10\cos(5x-3)$ n'est pas visible.

## 10 Précision des réponses

*Les candidats **NE** doivent **PLUS** être pénalisés pour une erreur de précision (**AP**).*

*Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera prévu pour avoir donné la réponse à la précision demandée. Lorsque le niveau de précision n'est pas spécifié dans la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près. Veuillez soigneusement vérifier le travail des candidats pour les points **FT**.*

## 11 Travail barré

*Si le candidat a tiré une ligne au travers de son travail sur la copie d'examen, ou s'il a barré son travail d'une autre façon, n'attribuez pas aucun point pour ce travail.*

## 12 Calculatrice

*Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour l'épreuve 3, mais les calculatrices pouvant effectuer des calculs formels (par exemple, la TI-89) ne sont pas autorisées.*

**Notation de type calculatrice**
On peut lire dans le *Guide de mathématiques NS* :

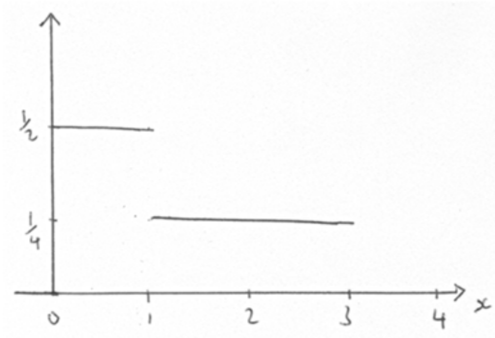
*Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes, et non des notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.*

N'acceptez **pas** des réponses finales écrites avec des notations de type calculatrice. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation d'une telle notation au cours des étapes du travail.

## 13 Plusieurs solutions

*Lorsqu'un candidat propose deux réponses différentes ou plusieurs réponses à la même question, l'examinateur doit noter seulement la première réponse, sauf si le candidat donne des instructions différentes.*

**1.** (a)




***A1***

| | |
|---|---|
| **Note :** | Ignorez des points ouverts ou fermés aux extrémités ainsi que des lignes verticales. |

| | |
|---|---|
| **Note :** | Attribuez ***A1*** pour une représentation graphique correcte avec des échelles sur les deux axes et une indication claire des valeurs pertinentes. |

***[1 point]***

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

en considérant les aires dans leur esquisse ou en utilisant l'intégration ***(M1)***

$F(x) = 0, \quad x < 0$, $F(x) = 1, \quad x \ge 3$ ***A1***

$F(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x < 1$ ***A1***

$F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, \quad 1 \le x < 3$ ***A1A1***

| | |
|---|---|
| **Note :** | Acceptez $<$ pour $\le$ partout et également $>$ pour $\ge$ pour le premier ***A1***. |

***[5 points]***

(c) $Q_3 = 2$ ***A1***

***[1 point]***

***Total [7 points]***

**2.** (a) **MÉTHODE 1**

soit $X$ le nombre de lancers jusqu'à ce qu'Eric atteigne la cible trois fois

$X \sim \mathrm{NB}(3\,;0,2)$ ***(M1)***

$\mathrm{P}(X=6)=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}0,8^3\times 0,2^3$ ***(A1)***

$=0,04096\left(=\dfrac{128}{3125}\right)$(valeur exacte) ***A1***

**MÉTHODE 2**

soit $X$ le nombre de cibles atteintes en cinq lancers
$X$ est $\mathrm{B}(5\,;0,2)$ ***(M1)***

$\mathrm{P}(X=2)=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}0,2^3\times 0,8^3 \qquad (0{,}2048)$ ***(A1)***

$\mathrm{P}(3^{\mathrm{e}}$ cible atteinte au $6^{\mathrm{e}}$ lancer$)$
$=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}0,2^2\times 0,8^3\times 0,2=0,04096\left(=\dfrac{128}{3125}\right)$ (valeur exacte) ***A1***

***[3 points]***

(b) (i) nombre espéré de lancers $=\dfrac{3}{0,2}=15$ ***(M1)A1***

(ii) profit $=(10-15)=-5\$$ ou perte $=5\$$ ***A1***

***[3 points]***

(c) **MÉTHODE 1**

soit $Y$ le nombre de fois que la cible est atteinte en 8 lancers
$Y \sim \mathrm{B}\,(8\,;0,2)$ ***(M1)***
$\mathrm{P}(Y\le 2)$ ***(M1)***
$=0,797$ ***A1***

**MÉTHODE 2**

supposons que la cible est atteinte pour la 3$^{\mathrm{e}}$ fois lors du $Y^{\text{ième}}$ lancer
$Y$ est $\mathrm{NB}\,(3\,;0,2)$ ***(M1)***
$\mathrm{P}(Y>8)=1-\mathrm{P}(Y\le 8)$ ***(M1)***
$=0,797$ ***A1***

***[3 points]***

***Total [9 points]***

**3.** (a) **MÉTHODE 1**

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big)$

$= \mathrm{E}\big(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X \mu_Y\big)$ ***(M1)***

$= \mathrm{E}(XY) - \mu_Y \mathrm{E}(X) - \mu_X \mathrm{E}(Y) + \mu_X \mu_Y$

$= \mathrm{E}(XY) - \mu_X \mu_Y$ ***A1***

puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, $\mathrm{E}(XY) = \mu_X \mu_Y$ ***R1***

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ ***AG***

**MÉTHODE 2**

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big)$

$= \mathrm{E}\big(X - \mu_x\big)\mathrm{E}\big(Y - \mu_y\big)$ ***(M1)***

puisque $X$ , $Y$ sont indépendantes ***R1***

$= (\mu_x - \mu_x)(\mu_y - \mu_y)$ ***A1***

$= 0$ ***AG***

***[3 points]***

(b) $H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho < 0$ ***A1***

**Note :** Les hypothèses doivent être exprimées en fonction de $\rho$ .

Statistique du test $t_{test} = -0{,}35\sqrt{\dfrac{20-2}{1-\left(-0{,}35\right)^2}}$ ***(M1)(A1)***

$= -1{,}585\ \ldots$ ***(A1)***

degrés de liberté $= 18$ ***(A1)***

**SOIT**

valeur $p = 0{,}0652$ ***A1***

ceci est supérieur à $0{,}05$ ***M1***

**SOIT**

$t_{5\,\%}(18) = -1{,}73$ ***A1***

ceci est inférieur à $-1{,}59$ ***M1***

**PUIS**

donc acceptez $H_0$ ou rejetez $H_1$ ou l'équivalent, ou l'équivalent dans le contexte ***R1***

**Note :** Accordez des points de suivi pour le dernier point ***R1***.

***[8 points]***

***Total [11 points]***

**4.** (a) (i) $G'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ ***A1***

$\mathrm{E}(X) = G'(1)$ ***M1***

$= \lambda$ ***AG***

(ii) $G''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$ ***M1***

$\Rightarrow G''(1) = \lambda^2$ ***(A1)***

$\mathrm{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2$ ***(M1)***

$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$ ***A1***

$= \lambda$ ***AG***

***[6 points]***

(b) (i) $\mathrm{E}(S) = 2\lambda - \lambda = \lambda$ ***A1***

(ii) $\mathrm{Var}(S) = 4\lambda + \lambda = 5\lambda$ ***(A1)A1***

**Note :** Le premier ***A1*** peut être attribué soit pour $4\lambda$ soit pour $+\lambda$.

***[3 points]***

(c) (i) $\mathrm{E}(T) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$ (donc $T$ est un estimateur sans biais) ***A1***

(ii) $\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{2}\lambda$ ***A1***

ceci est inférieur à $\mathrm{Var}(S)$, donc $T$ est le meilleur estimateur ***R1AG***

**Note :** Points de suivi à partir de leurs variances de (b)(ii) et (c)(ii).

***[3 points]***

(d) non, la moyenne n'est pas égale à la variance ***R1***

***[1 mark]***

***Total [13 points]***

**5.** (a) $\bar{X} \sim N\left(5,2;\, \frac{1,2^2}{16}\right)$ ***(M1)***

la valeur critique est $5,2 - 1,64485\ldots \times \frac{1,2}{4} = 4,70654\ldots$ ***(A1)***

la région critique est $\left]-\infty;\, 4,71\right]$ ***A1***

| | |
|---|---|
| **Notes :** | Accordez des points de suivi pour le dernier point ***A1*** à partir de leur valeur critique. |

***[3 points]***

| | |
|---|---|
| **Note :** | Points de suivi à partir des valeurs précédentes dans (b), (c) et (d). |

(b) probabilité d'une erreur de type II

$= \mathrm{P}\left(\bar{X} > 4,70654\ldots \middle| \bar{X} \text{ est } N\left(4,6;\, \frac{1,2^2}{16}\right)\right)$ ***(M1)***

$= 0,361$ ***A1***

***[2 points]***

(c) $0,9 \times 0,05 + 0,1 \times (1 - 0,361\ldots) = 0,108875997\ldots = 0,109$ ***M1A1***

| | |
|---|---|
| **Note :** | Attribuez ***M1*** pour une moyenne pondérée des probabilités avec pondérations $0,1$ et $0,9$. |

***[2 points]***

(d) pour avoir tenté d'utiliser la formule de la probabilité conditionnelle ***M1***

$\frac{0,9 \times 0,05}{0,108875997\ldots}$ ***(A1)***

$= 0,41334\ldots = 0,413$ ***A1***

***[3 points]***

***Total [10 points]***